

801.526 Asterosismoloji

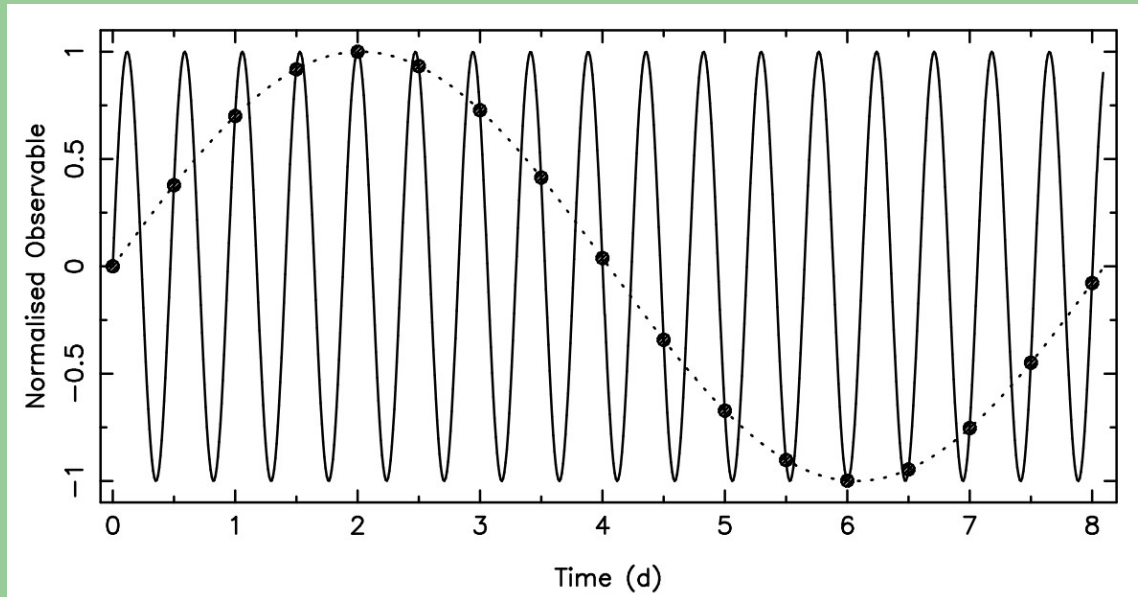
Ders 3 :
Asterosismolojide Veri Analizi

“Asterosismik” Verinin Zorluğu - I

- ✓ Yıldız salınımları bazı parametrelerin periyodik olarak değişmesine neden olur Bu fiziksel parametrelerin periyodik değişimi parlaklık, renk, dikine hız ve tayfsal çizgi profilleri gibi gözlemsel parametrelerde de periyodik değişimlere yol açar.
- ✓ Zaman serisi verinin analizi istatistikte çok geniş bir şekilde ele alınmıştır. Ancak teori “kesintisiz ve eş-zaman aralıklı” veriye dayandığı için yıldız salınımlarının analizinde yetersiz kalabilmektedir.
- ✓ Astronomide elde edilen veri neredeyse her zaman arasında boşluklar bulunan ve eş-zaman aralıklarında alınmamış bir veri setidir. Aradaki boşluklar çoğunlukla “yalancı dönemleri” de birlikte getirir. Bu durumun temel sebepleri
 - ✓ Sadece gece veri alınabilmesi,
 - ✓ Dünya’nın Güneş etrafındaki hareketi nedeniyle “batmayan yıldızlar” dışındakilerin ancak bazı mevsimlerde gözlenebilmeleri,
 - ✓ Ay’ın evrelerine bağlı olarak değişen gözlem programları,
 - ✓ Sonlu poz süreleri
 - ✓ Çok renkli fotometri
 - ✓ Değişen hava koşulları

“Asterosismik” Verinin Zorluğu - II

- ✓ Her ne kadar bu konular da istatistikte çok iyi ele alınmış olsa da astronomik verinin analizinde kullanılmaması önerilir. Çünkü
 - ✓ Boşlukların doğru bir şekilde doldurulması için salınım frekanslarının deterministik bir diğer izlemesi (boşluk boyunca da boşluk öncesi ve sonrasındaki şekilde davranması) gerekir ki astronomi gözlemlerinde bunu böyle varsaymak genellikle doğru değildir.
 - ✓ Çoğu zaman “kayıp veri”, elde olandan daha fazladır. Sinyalin yeniden oluşturulabilmesi (ing. reconstruction) yeterli gözlemin olmadığı bu durumda (ing. low duty cycle) mümkün olmaz.
- ✓ Astronomide genellikle eş aralıkla alınmamış, aralarında boşluklar ve üzerinde ciddi hatalar bulunan yetersiz gözlemsel veri ile uğraşılır.



$$f_{\text{gerçek}} = 0.123456789 \text{ gün}^{-1}$$

$$f_{\text{fit}} = 2.123456789 \text{ gün}^{-1}$$

En Küçük Kareler Yöntemiyle Harmonik Analiz – I

Harmonic Analysis by Least Squares

$x(t_i) = x_i$, t_i zamanlarında oalınmış gözlemsel veriler olmak üzere, en küçük kareler yönteminde amaç bu gözlemsel veriyi

$$x(t_i) = \sum a_k \cos [2\pi v_k(t_i - \tau)] + b_k \sin [2\pi v_k(t_i - \tau)] + c_k + \varepsilon_i$$

şeklinde ifade etmektir. Burada toplam $[1, M]$ aralığında alınır ve

- ✓ M : Salınım modlarının sayısını,
- ✓ v_k : k. modun frekansını,
- ✓ τ : referans zamanı (epoch),
- ✓ a_k, b_k, c_k : fit parametrelerini,
- ✓ ε_i : ölçüm hatalarını

gösterir. Amaç her bir k salınım modu için v_k 'yi ve a_k, b_k, c_k fit parametrelerin hesaplamaktır.

Tek bir mod için frekans hesabı:

$M = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = b$ ve $c_1 = c$ olmak üzere her bir v test frekansı için a , b ve c katsayıları hesaplanır ve hesaplanan x^c_i ile gözlenen x_i arasındaki farklar hesaplanır. En iyi frekans bu farkların minimize olduğu frekanstır. Olasılık fonksiyonu (ing. likelihood function)

$$L = \sum \{x_i - (a \cos [2\pi v(t_i - \tau)] + b \sin [2\pi v(t_i - \tau)] + c)\}^2$$

fonksiyonunu minimize ederek bu amaca ulaşmak mümkündür.

En Küçük Kareler Yöntemiyle Harmonik Analiz - II

$$x_i^c = A \cos \{ 2\pi [v(t_i - \tau)] + \delta \} + C$$

şeklinde de ifade edilebileceğinden a_k , b_k ve c_k katsayılarını hesaplamak ile

- ✓ A : Genlik
- ✓ δ : Evre
- ✓ C: Kayma (offset)

katsayılarını hesaplamak aynı şeydir.

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ve } 2\pi\delta = \arctan (-b / a)$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu algoritma sonunda bulduğumuz frekansın verideki değişim açıklamadaki başarısı **varyans kesri** parametresi ile birleşir.

$$f_v = \frac{\sum \{ x_i - A \cos \{ 2\pi [v(t_i - \tau)] + \delta \} + C \}^2}{\sum (x_i - x_{\text{ortalama}})^2} = 1 - L / \sum (x_i - x_{\text{ortalama}})^2$$

Çoklu frekansların aranması:

Yıldızda kaç frekansın olduğu önceden bilinmediği için M de bulunması gereken bir parametredir. Bu nedenle bulunan her bir frekans veriden ayıklanıp (**ön yıkama: prewhitening**), iteratif bir yöntemle diğer çözümler aranır. Bu çözüm doğası gereği veri tarafından dikte edilir. Böyle bir yöntem model-tabanlı bir yöneme göre dezavantajlıdır.

Bu süreç her seferinde daha önce bulunmuş tüm frekansları fiksleyip, genlik ve evrelerini serbest bırakarak tekrar en küçük kareler yöntemiyle fit yaparak iyileştirilebilir. Burda fikse edilen bileşen "**bilinen**" (ing. **known constituent**) **bileşenler**, serbest bırakılanlar ise "**bilinmeyen**" (ing. **unknown constituents**) **bileşenler** olarak adlandırılır. Bu ikinci tip bileşenler verideki sistematik gürültünün yanı sıra rastgele gürültünün de kaynağıdır.

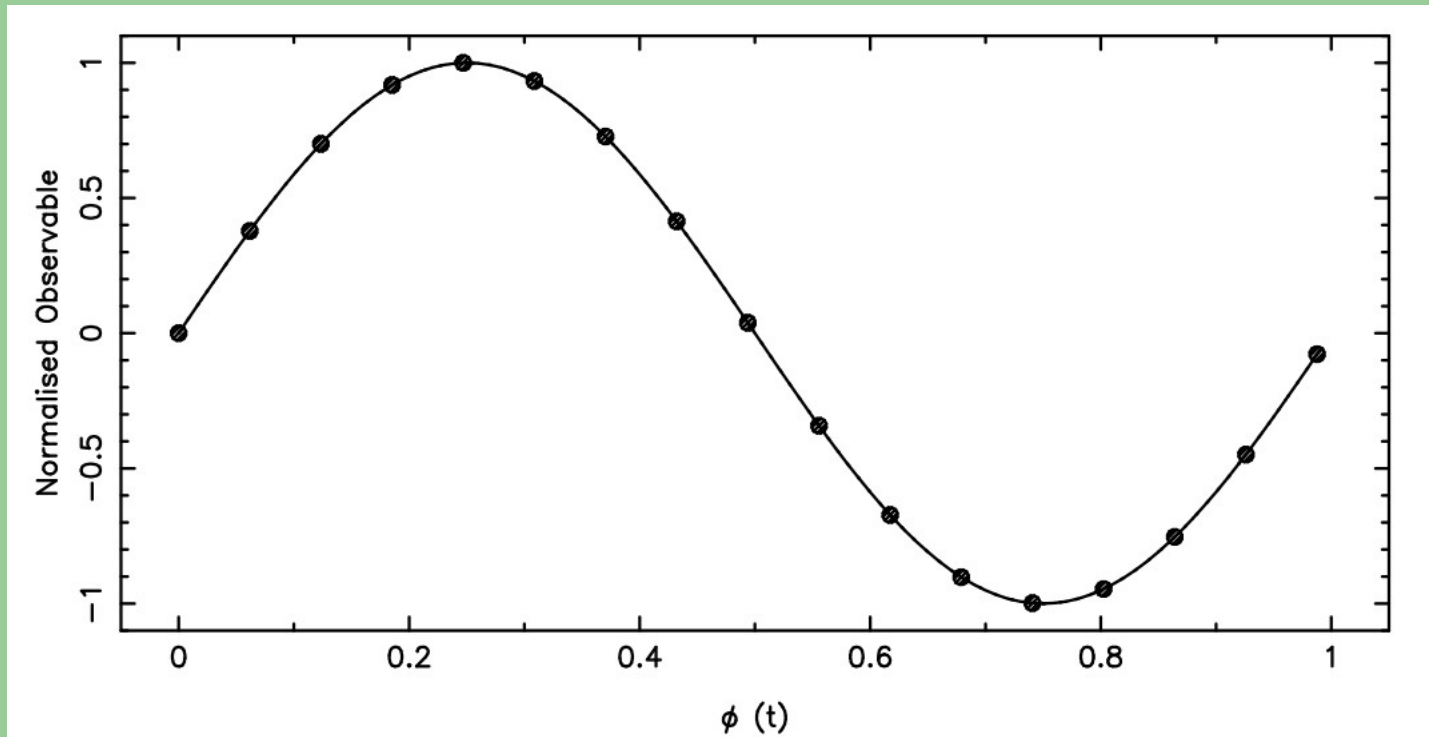
Sicim Uzunluğu Yöntemi – I

String Length Method

Yine $x(t_i) = x_i$, t_i zamanlarında alınmış gözlemsel veriler olmak üzere, verinin içinde varsa ν frekansı (ya da $\pi = 1 / \nu$ dönemi) ile τ referans zamanı için evre aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\phi(t_i) = [\nu(t_i - \tau)] = \left[\frac{t_i - \tau}{\pi} \right]$$

Yine $x(t_i)$ fonksiyonunun $\phi(t_i)$ ile değişimi evre diyagramı (ing. phase diagram) olarak adlandırılır.

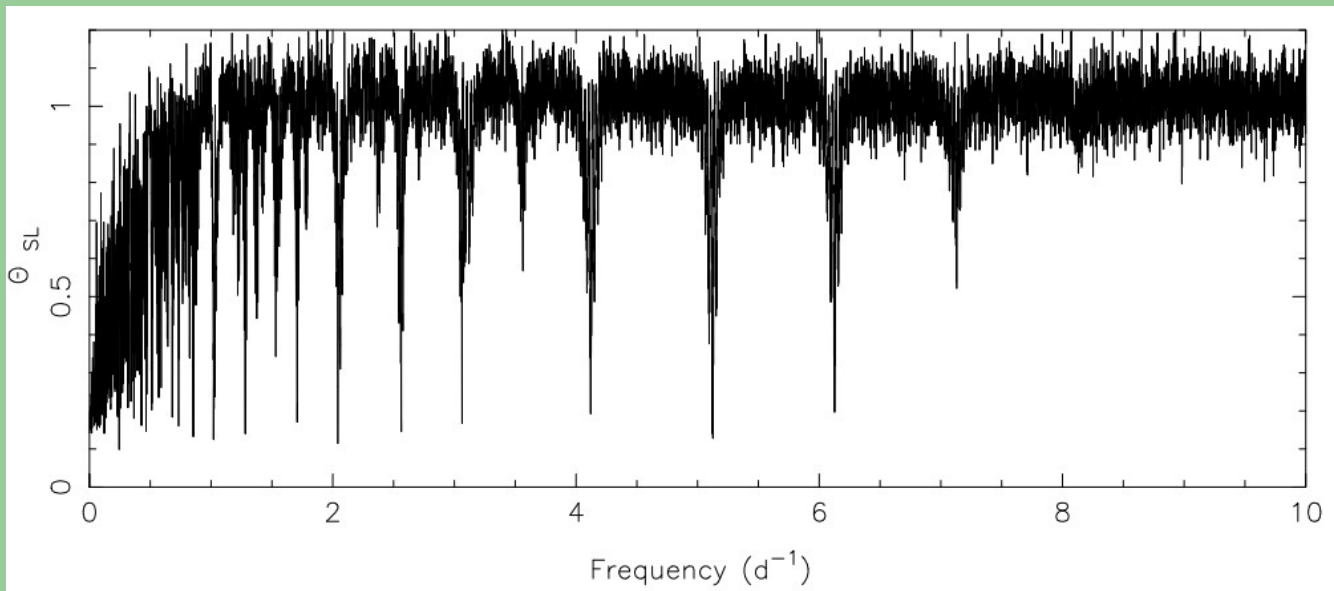


Sicim Uzunluğu Yöntemi - II

Bir $v(v_j)$ test frekans uzayından (gridinden) seçilen her bir v_j test frekansı için $x(t_i)$ gözlemsel verisine karşılık $\phi_i = \phi(t_i)$ evresi hesap edilir. Bu evreler küçükten büyüğe sıralanır ve denen her frekans için **sicim uzunluğu** (ing. string length) parametresi hesaplanır.

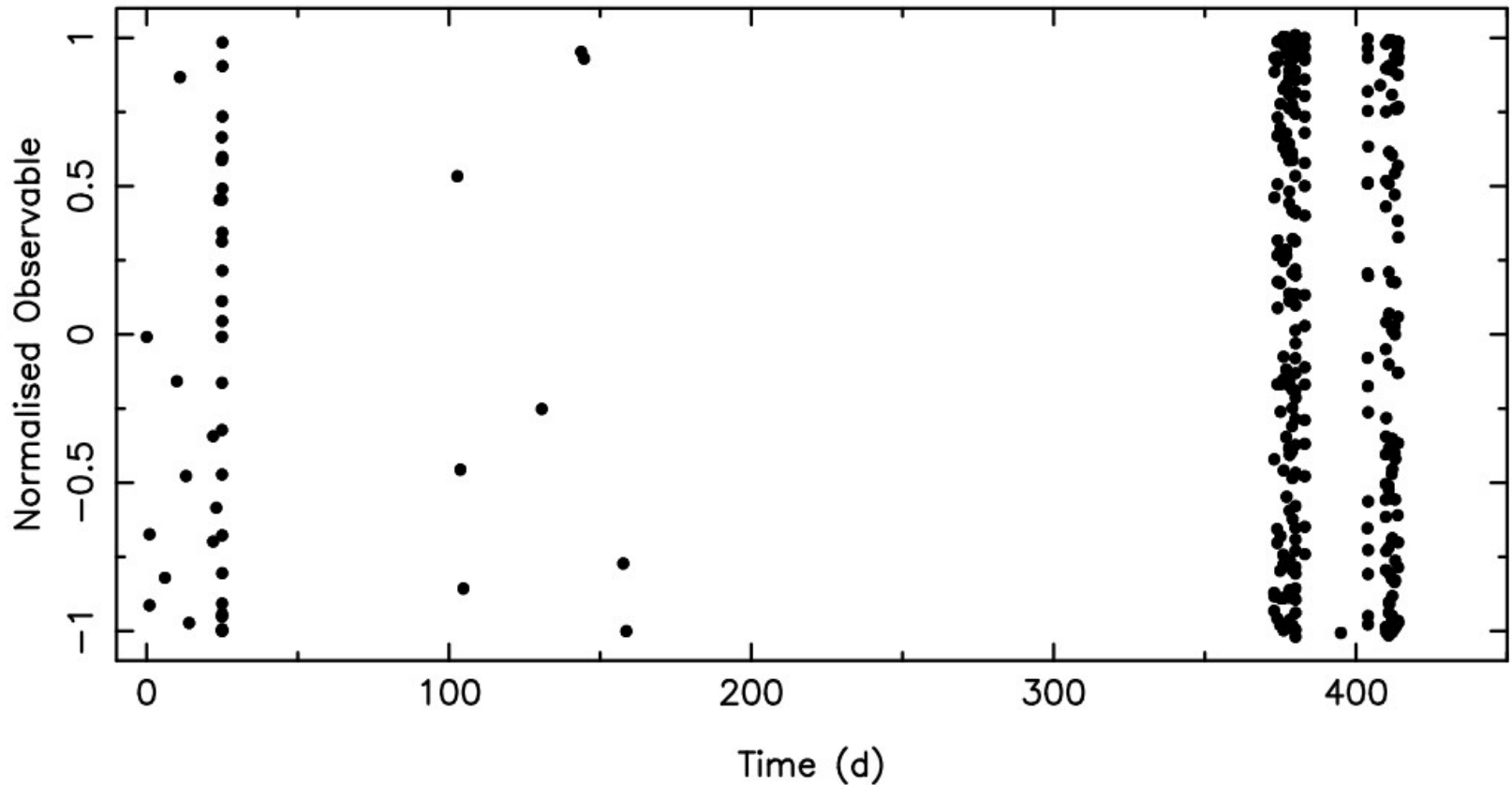
$$\Theta_{SL}(\nu) \equiv \frac{\sum_{i=1}^N [x(\phi_{i+1}) - x(\phi_i)]^2}{\sum_{i=1}^N [x(\phi_i) - \bar{x}]^2} \times \frac{N-1}{2N}$$

Veride v_j test frekansı ile tekrar eden bir değişim varsa bu frekansta Θ_{SL} sicim uzunluğu minimum olur.



Sicim Uzunluğu Yöntemi - III

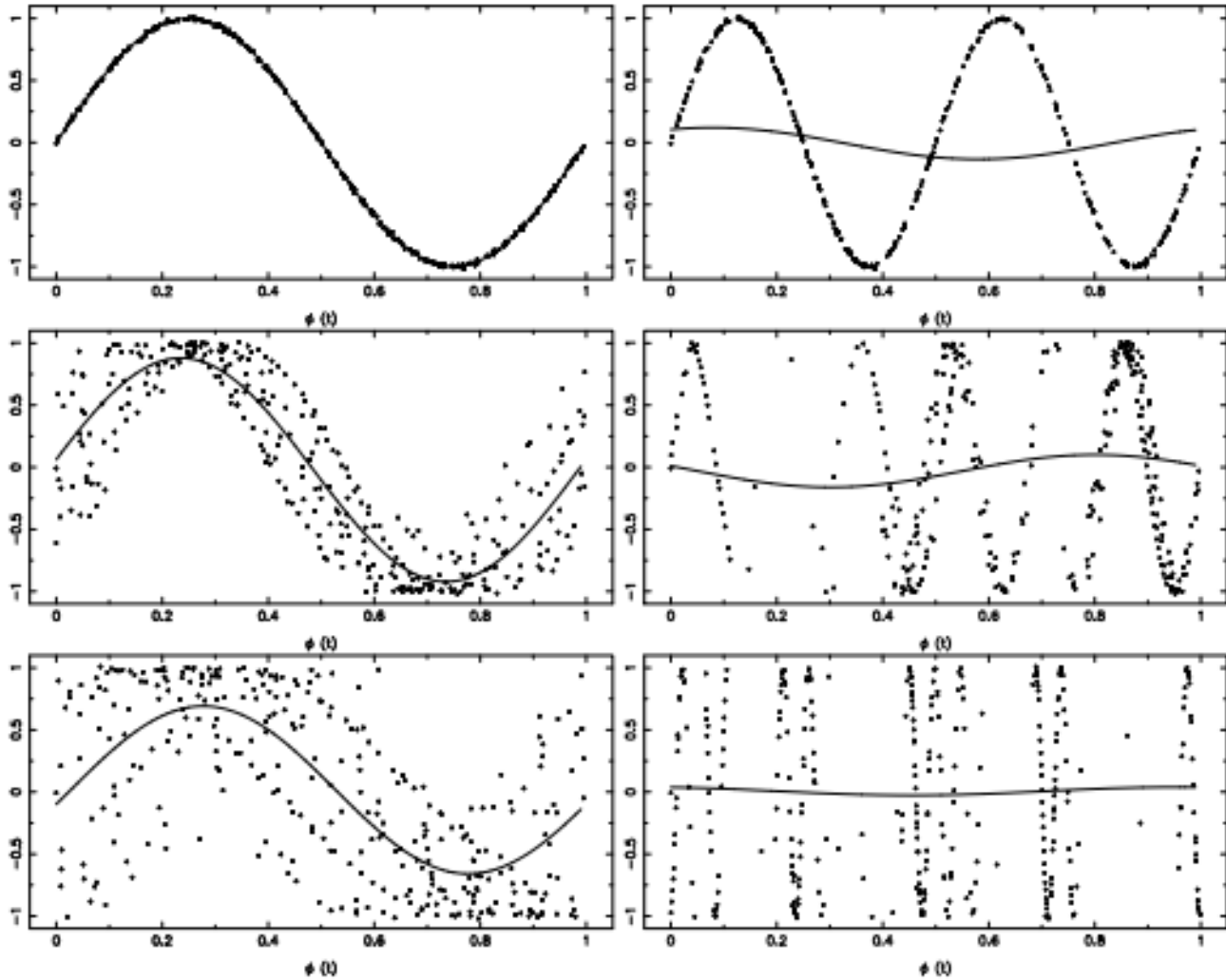
Genellikle aşağıdaki gibi bir yer tabanlı, aralarında büyük boşluklar bulunan verinin sicim uzunluğu grafiği bu şekilde olur. Her ne kadar değişim frekansı grafiğin en derin minimumu veren noktada olsa da boşlukların neden olduğu gürültü ve yalancı frekanslar bu frekansın bulunmasını engeller. En derin minimum veren birkaç frekansa göre veri evrelendirilip çizdirilerek hangi frekansın gerçek değişim frekansı olduğu bulunmaya çalıőılır.



Sicim Uzunluğu Yöntemi - IV

z tane filtreyle gözlem yapıldığında, ya da z adet tayfsal çizgiden frekans belirlenmeye çalışıldığında sicim uzunluğu terimi yerine **halat uzunluğu** (ing. robe length) terimi kullanılır.

$$\Theta_{\text{RL}}(\nu) \equiv \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^Z \left(\frac{\sum_{i=1}^{N[k]} [x_k(\phi_{i+1}) - x_k(\phi_i)]^2}{\sum_{i=1}^{N[k]} [x_k(\phi_i) - \bar{x}_k]^2} \times \frac{N[k] - 1}{2N[k]} \right)$$



Aralarında büyük boşluklar bulunan veri seti için hesaplanan 6 minimum sicim uzunluğu kullanılarak belirlenmiş 6 frekansa göre evre grafikleri

Evre Dağılımı Minimizasyonu (Phase Dispersion Minimization)

Evre Dağılımı Minimizasyonu da Sicim Uzunluğu gibi parametrik olmayan bir yöntemdir ve evre diyagramlarında ortalama bir eğri etrafındaki minimum saçılmayı veren frekansı belirlemeye dayanır.

Yöntemin uygulamasında her bir v test frekansı için $[0, 1]$ evre aralığı B tane eşit aralığa (bin) bölünür. Aralık indeksi $J_i = \text{int}(B\phi_i) + 1$ ve $\text{int}(x) = x - [x]$, $x(t_i)$ gözleminin hangi aralığa düştüğünü belirler. j . aralığın (bin'in) N_j tane gözlem içerdiğini varsayalım. Her bir aralığın ortalama değeri, ortalamadan fark kareler toplamı (V_j^2) ve varyansı (s_j^2) aşağıdaki ifadelerle verilir.

$$\begin{aligned}\bar{x}_j &= \sum_{i=1}^{N_j} \frac{x_{ij}}{N_j}, \\ V_j^2 &= \sum_{i=1}^{N_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \sum_{i=1}^{N_j} x_{ij}^2 - N_j \bar{x}_j^2, \\ s_j^2 &= \frac{V_j^2}{N_j - 1},\end{aligned}$$

Tüm veri seti için aynı parametreler yandaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}, \\ V^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - N \bar{x}^2, \\ s^2 &= \frac{V^2}{N - 1}.\end{aligned}$$

Evre Dağılımı Minimizasyonu (Phase Dispersion Minimization)

B tane aralık (bin) için V_B^2 ve V_G^2 parametreleri aşağıdaki şekilde tanımlandığında $V^2 = V_B^2 + V_G^2$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} V_B^2 &= \sum_{j=1}^B V_j^2, \\ V_G^2 &= \sum_{j=1}^B N_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2. \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad V^2 = V_B^2 + V_G^2$$

Yani her bir aralıkta yer alan ölçümlerin aralığın ortalamasından fark kareler toplamının (V_j^2) toplamı ile (V_B^2) ile her bir aralığın ortalaması ($\bar{x}_j$) ile tüm veri setinin ortalamasının ($\bar{x}$) arasındaki farkın karesinin her bir aralıktaki ölçüm sayıları ile çarpımının toplamı (V_G^2), veri setindeki her bir ölçümün tüm veri (x_i) setinin ortalamasından ($\bar{x}$) fark karelerinin toplamına (V^2) eşittir.

Bu şu anlama gelir: **aralık ortalamaları ($\bar{x}_j$) ile tüm veri setinin ortalaması ($\bar{x}$) arasındaki fark, test frekansı (v) verinin içinde bulunmadığı vakit küçük olur.** Bir başka deyişle “Eğer test frekansı verinin gerçek değişimi ile uyumlu değilse bu frekansa göre belirlenen aralıklar için ortalama gözlemsel değer ile tüm veri seti için verilen ortalama değer arasındaki fark küçük olmalıdır.”. Bu durumda $V_G^2 \ll V^2$ ($V_B^2 \sim V^2$) olur. **Aralık ortalamaları ile tüm veri setinin ortalaması arasındaki fark, test frekansı veri içinde bulunduğu zaman ise maksimum olur.** Yani “Eğer test frekansı verinin gerçek değişimini ifade ediyor ise aralıklar için ortalama değer ile tüm veri için verilen ortalama değer birbirinden çok farklı olur”. Bu durumda ise $V_G^2 \sim V^2$ olur. Bu nedenle değişim frekansının en olası değeri V_G^2 ’nin maksimum (dolayısı ile V_B^2 ’nin minimum) olduğu frekans değeridir.

Evre Dağılımı Minimizasyonu (Phase Dispersion Minimization)

Her ne kadar bu yöntemin temelini oluştursa da her aralığa ölçüm düşmesinin bir garantisi olmadığı gibi, aralarında ciddi zaman farklılıkları bulunan az sayıda veri düşme ihtimali de olabilir. Bundan kaçınmak için; tüm evre diyagramı B tane aralığa ayrıldıktan sonra (her birinin uzunluğu 1 / B), her bir aralık her defasında 1 / (B x C) kadar kaydırılarak aralıklara ayırma işi C defa tekrarlanır. Böylece evre diyagramı C kez kapsanmış olur ve her bir bölümlmeye (partition) B adet aralık (bin) düşer ve her gözlem mutlaka bir aralığa düşmüş olur. C adet bölümleme için toplam aralık sayısı $B_C = B \times C$ olmak üzere,

$$\Theta_{\text{PDM}} \equiv \frac{\left(\sum_{j=1}^{B_C} (N_j - 1) s_j^2 \right) / \left(\sum_{j=1}^{B_C} N_j - B_C \right)}{\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right) / (N - 1)}$$

olarak tanımlanır. Burada s_j ,

$$s_j^2 \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{N_j - 1}$$

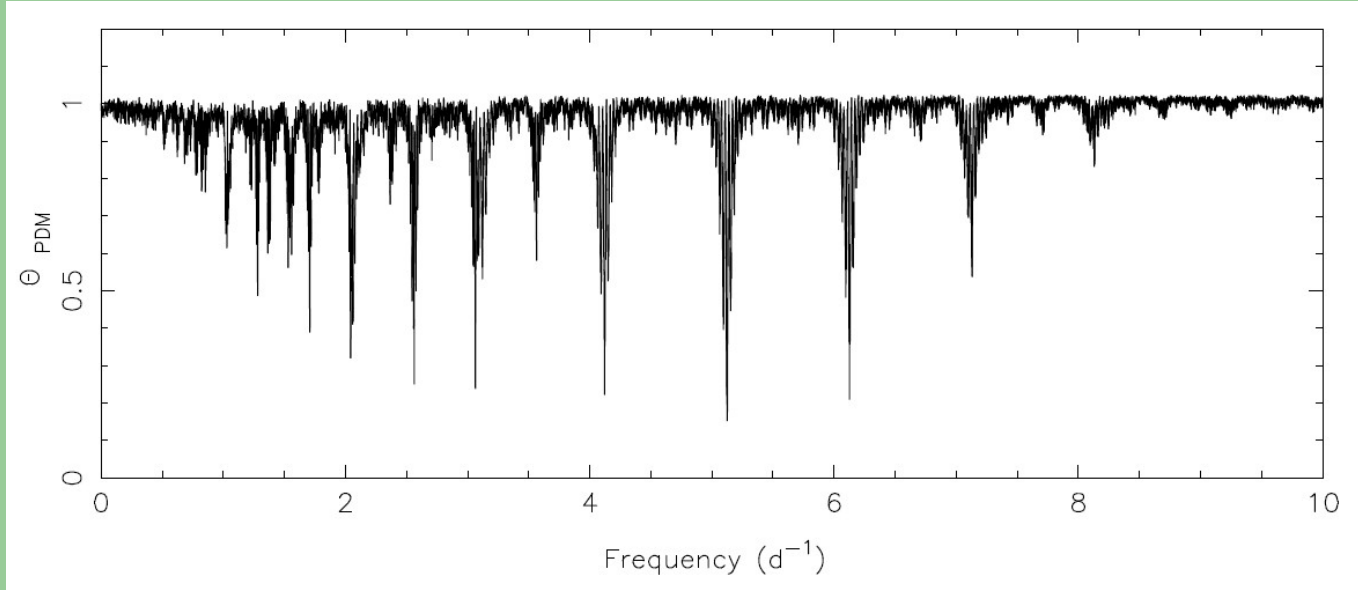
olduğundan Θ_{PDM} parametresi ,

$$\Theta_{\text{PDM}} = \frac{V_{B_C}^2 / \left(\sum_{j=1}^{B_C} N_j - B_C \right)}{V^2 / (N - 1)} = \frac{V_{B_C}^2 / C (N - B)}{V^2 / (N - 1)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Θ_{PDM} minimum olduğunda V_{B_C} de minimum olur ve aranan frekans bulunmuş olur. Eğer v test frekansı verinin gerçek değişimi ile uyumlu değilse $\Theta_{\text{PDM}} \sim 1$ bulunur.

Evre Dağılımı Minimizasyonu (Phase Dispersion Minimization)

C ne kadar büyük olursa (yani ne kadar çok bölümlere yapılırsa) gerçek frekansı bulma şansı da hesap maliyeti de o kadar artar. Aralık sayısının (B) tipik değeri (5 – 20), bölümlere sayısının (C) tipik değeri ise 1 – 10 arasında değişir.



B = 10, C = 2 için frekansa bağlı olarak Θ_{PDM} parametresinin değişimi

Daha önce verdiğimiz Θ_{SL} (sicim uzunluğu) ile karşılaştırıldığında Θ_{PDM} istatistiğinin daha “temiz” bir istatistik olduğu görülüyor. Θ_{PDM} verinin her bir aralıktaki ortalamasının tüm verinin ortalamasına göre dağılımını verdiği için tüm evre diyagramı üzerinde bir noktadan diğerine dağılımı minimize etmeye dayanan sicim uzunluğu parametresine (Θ_{SL}) göre daha “temiz” bir parametredir.

Parametrik Frekans Analizi Yöntemleri

Bu yöntemler temelde kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının kombinasyonlarına dayanan Fourier analiz yöntemleridir. Tüm düzgün değişen fonksiyonlar Fourier fonksiyonları ile temsil edilebileceği için düzgün değişim içeren sürekli verinin analizinde oldukça başarılıdır.

Tüm Fourier transform yöntemlerinde test frekansı gerçek frekansa ulaştığında maksimum veren bir fonksiyon kullanılır. Bu fonksiyonun frekansa göre grafiği **periodogram** olarak adlandırılır.

Fourier Serileri

T dönemle kendini tekrar eden fonksiyonlara **periyodik fonksiyonlar** denir $\rightarrow f(t + T) = f(t)$. T periyoduna sahip **Fourier Serisi**, frekansı $\nu = 1 / T$ temel frekansının tam katları olan sinüsoidal fonksiyonların sonsuz toplamıdır.

$$g(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

www.thefouriertransform.com

a_m ve b_n katsayıları periyodik fonksiyonun y eksenindeki kayma miktarını (a_0) ve farklı frekanstaki her bir sinüs – kosinüs fonksiyonuna verilecek ağırlığı belirler. Dolayısı ile periyodik fonksiyonu Fourier serisine açmak, bu katsayıları belirlemektir. Birinci katsayı fonksiyonun ortalama değeridir.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Parametrik Frekans Analizi Yöntemleri

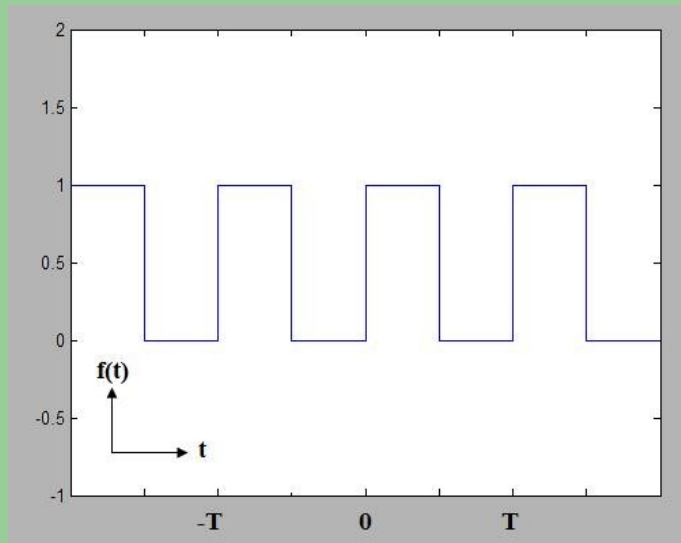
Bir Fourier serisinin tüm katsayıları aşağıdaki ifadelerle verilebilir.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

Örnek: Kare dalga fonksiyonu (aşağıda solda) için yukarıdaki formüller kullanılarak elde edilebilecek katsayılar (aşağıda sağda) kullanılarak Fourier serisi oluşturulabilir.



$$a_0 = \frac{1}{2}$$

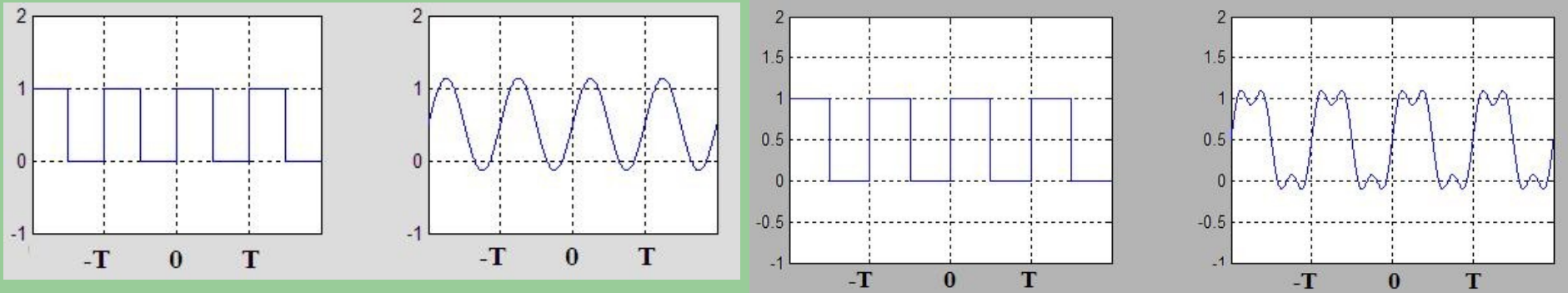
$$a_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, & n \text{ odd} \\ 0, & n \text{ even} \end{cases}$$

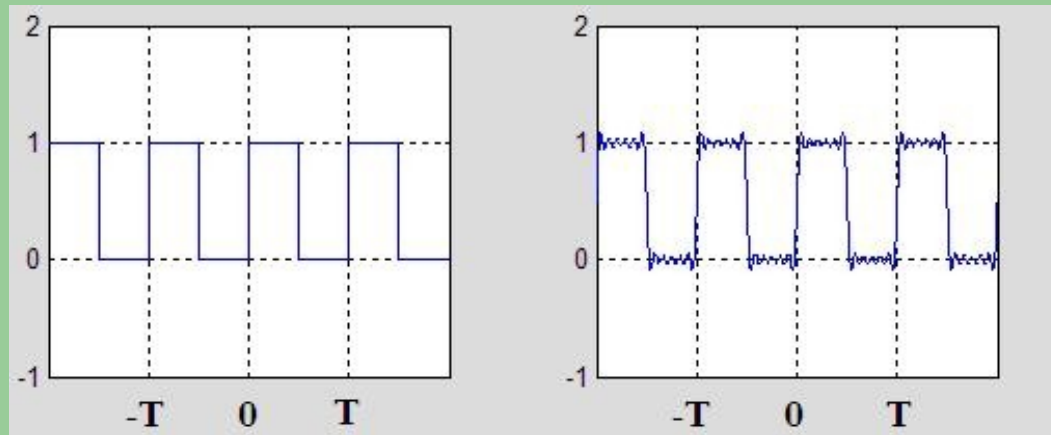
Fourier Serileri

$a_0 = 0.5$ olduğunu görmek fonksiyonun ortalama değerini integral formülüyle hesaplamaktan çok daha kolaydır. Tüm $a_m = 0$ olduğu integrali almadan da görülebilir, zira kare dalga $(-3T/2, -T)$, $(-T/2, 0)$, $(T/2, T)$... aralıklarında 0'a, diğer aralıklarda 1'e eşittir. Diğer bir deyişle $f(t) = f(-t)$ olduğundan f tek fonksiyondur.

Kare dalga örneğinde Fourier serisini ilk iki terim ($a_0 = 0$ ve $b_1 = 2 / \pi$) alındığında altta solda, üç terimi (a_0, b_1, b_3) alındığında ise sağda görülen fonksiyon elde edilir.



Serinin ilk 7 terimi alındığında ise aşağıda grafiği görülen seri elde edilir.



Kompleks Fourier Serileri

Periyodik tüm fonksiyonlar ($f(t + T) = f(t)$), sinüsoidal fonksiyonların bir toplamı olarak ifade edilebilir. Bir fonksiyonun Fourier serisine açılımından ne kadar çok sayıda terim alınırsa fonksiyonun kendisine o kadar yakınsanır.

Fourier serileri Euler eşitliğinden yararlanılarak kompleks formda da yazılabilir.

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n t}{T}}$$

Bu durumda c_n katsayıları aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} dt$$

Örneğin kare dalga fonksiyonu için katsayılar aşağıdaki şekilde bulunur.

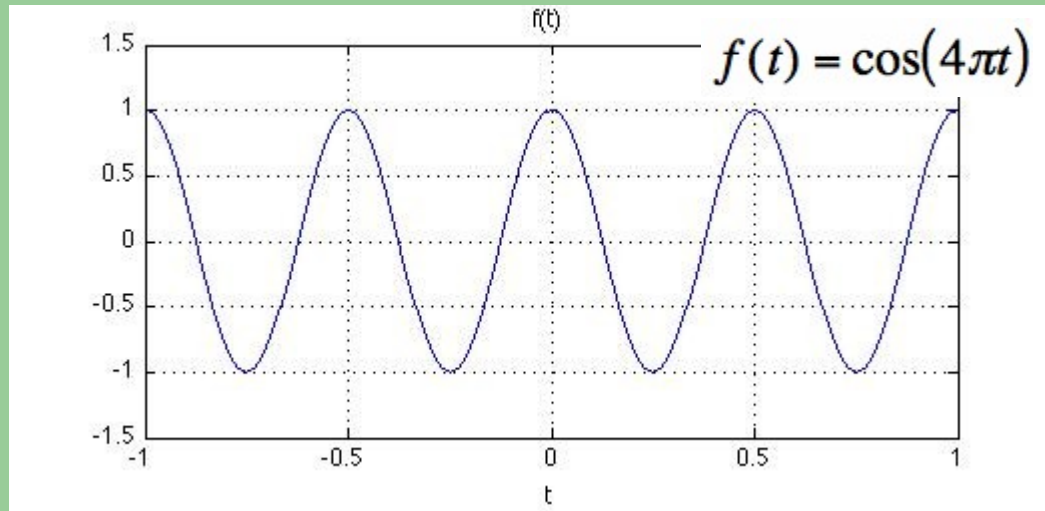
$$c_0 = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{i\pi n}, \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

$$c_n = 0, \quad n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$$

Örnek 1: Kosinüs Fonksiyonunun Fourier Serisine Açılımı

Aşağıdaki kosinüs fonksiyonunu ($f(t) = \cos(4\pi t)$) ele alalım.



$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} dt$$
$$= \frac{1}{0.5} \int_0^{0.5} \cos(4\pi t) e^{-i \frac{2\pi n t}{0.5}} dt$$

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

Integralde yerine yazılırsa

$$c_n = 2 \int_0^{0.5} \left(\frac{e^{i4\pi t} + e^{-i4\pi t}}{2} \right) e^{-i4\pi n t} dt$$
$$= \int_0^{0.5} e^{i4\pi(1-n)t} dt + \int_0^{0.5} e^{-i4\pi(n+1)t} dt$$

Örnek 1: Kosinüs Fonksiyonunun Fourier Serisine Açılımı

Öncelikle integrain sol tarafına bakalım.

$$\begin{aligned}\int_0^{0.5} e^{i4\pi t(1-n)} dt &= \frac{e^{i4\pi t(1-n)}}{i4\pi(1-n)} \Big|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{i4\pi(1-n)} \left[e^{i2\pi(1-n)} - 1 \right] \\ &= 0, \quad n \neq 1\end{aligned}$$

İntegralin sonucu $n = 1$ dışında her yerde 0, $n = 1$ 'de ise tanımsız görünüyor. Ancak integralin kendisi $n = 1$ için tanımsız değildir. $n = 1$ yerine integrasyondan önce konursa

$$\begin{aligned}c_1 &= \int_0^{0.5} e^{i4\pi t(1-n)} dt \stackrel{(n=1)}{=} \int_0^{0.5} e^{i4\pi t(1-1)} dt \\ &= \int_0^{0.5} 1 dt \\ &= 0.5\end{aligned}$$

Örnek 1: Kosinüs Fonksiyonunun Fourier Serisine Açılımı

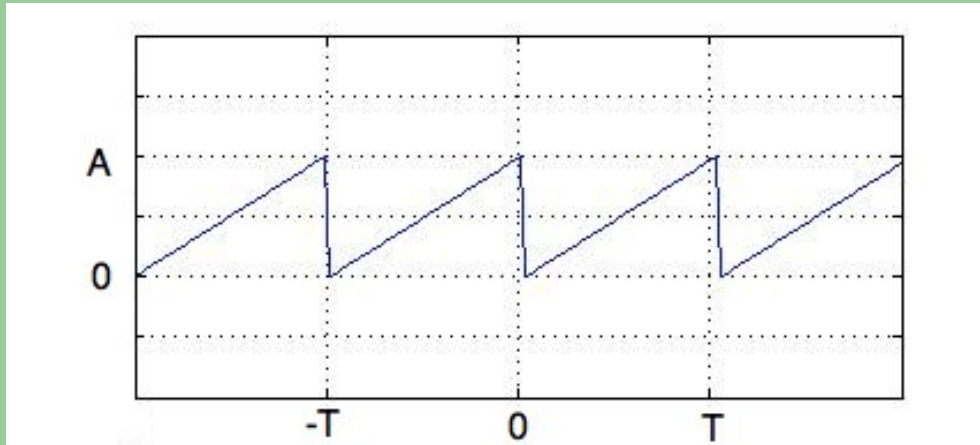
İntegrain sağ tarafı için de aynı şey geçerli olup bu kez $n = -1$ değerinin integrasyondan önce yerine konması gerekir ki bu durumda da $c_{-1} = 0.5$ bulunur. Diğer tüm c_n katsayıları 0 olur.

$c_{-1} = c_1 = 0$ yerine konursa fonksiyonun Fourier serisine açılımının fonksiyonun kendisi ile denk olduğu kolayca görülebilir.

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n t}{T}} \\ &= c_1 e^{i \frac{2\pi t}{T}} + c_{-1} e^{-i \frac{2\pi t}{T}} \\ &= 0.5 \left(e^{i 4\pi t} + e^{-i 4\pi t} \right) \\ &= \cos(4\pi t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Örnek 2: Testere Dişi Fonksiyonunun Fourier Serisine Açılımı

Testere dişi fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.



Fonksiyona karşılık gelen Fourier serisinin katsayıları yandaki şekildedir:

Öncelikle c_{-n} ile c_n 'in birbirlerinin kompleks eşleniği olduklarını görmek gerekir. Ayrıca $e^{-2inn} = 1$ 'dir.

$$f(t) = A \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t < T$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} dt$$

$$= \frac{A}{T^2} \int_0^T t e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} dt$$

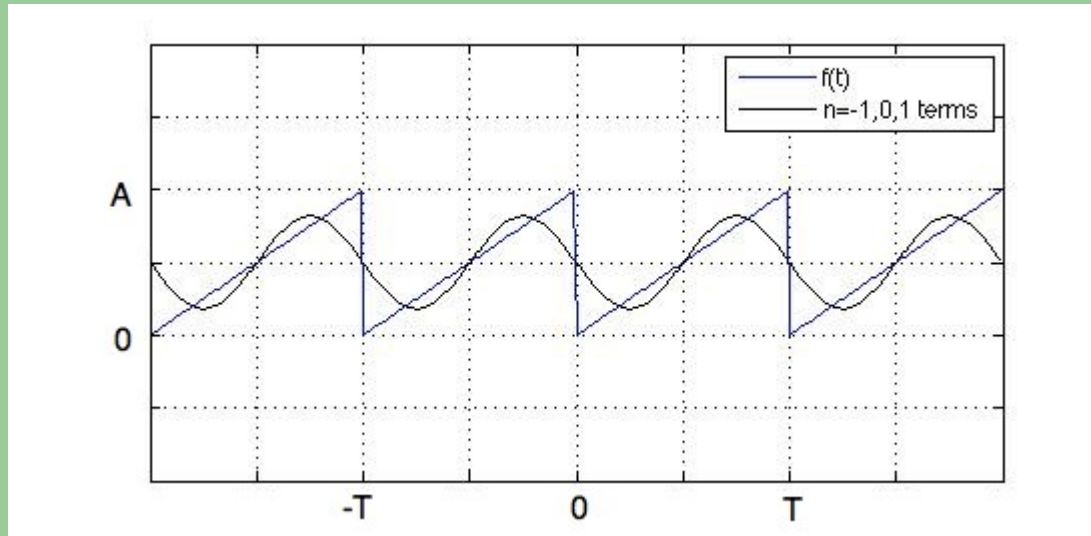
$$= \frac{A}{T^2} \left[\left\{ \frac{tT}{-i2\pi n} e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} + \frac{T^2}{(2\pi n)^2} e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} \right\}_0^T \right]$$

$$= \frac{A}{T^2} \left[\frac{T^2}{-i2\pi n} \right] = \frac{iA}{2\pi n}, \quad n \neq 0$$

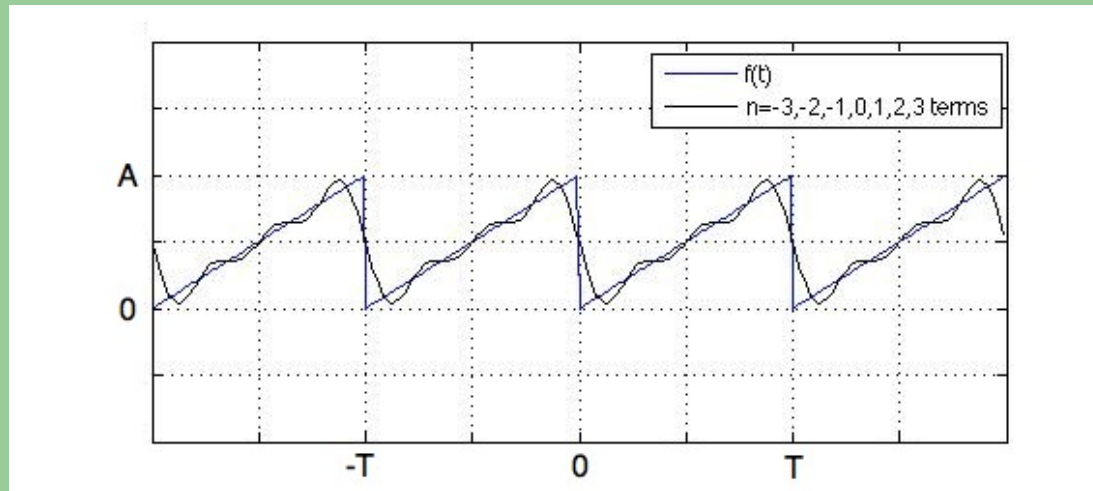
$$c_0 = \frac{A}{2}$$

Örnek 2: Testere Dişi Fonksiyonunun Fourier Serisine Açılımı

$n = -1, 0, 1$ terimleri alınırsa aşağıdaki yaklaşım elde edilir.



$n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ terimleri alınırsa da aşağıdaki yaklaşım elde edilir.



Kompleks Fourier Serisi Katsayıları (İspat)

$g(t)$, $f(t)$ 'nin sonsuz Fourier serisine açılımı ise ona eşittir.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi n t}{T}} dt \longrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n t}{T}}$$

Eşitliğin her iki tarafı $e^{-2imnt/T}$ ile çarpılıp $t = [0, T]$ arasında integre edilecek olursa

$$\begin{aligned} f(t) e^{-i \frac{2\pi m t}{T}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n t}{T}} e^{-i \frac{2\pi m t}{T}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi (n-m) t}{T}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi m t}{T}} dt &= \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi (n-m) t}{T}} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^T c_n e^{i \frac{2\pi (n-m) t}{T}} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^T e^{i \frac{2\pi (n-m) t}{T}} dt \end{aligned}$$

Sonuç olarak ise;

$$\int_0^T e^{i \frac{2\pi (n-m) t}{T}} dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T, & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi m t}{T}} dt = c_m T$$

Fourier Dönüşümleri

Fourier serileri bize herhangi periyodik bir fonksiyonu sinüsoidal fonksiyonlara dönüştürmeyi öğretti. Fourier dönüşümleri bu fikir alır ve periyodik olmayan fonksiyonlara da uygular. Böylece tüm fonksiyonların sinüsoidal fonksiyonların toplamı şeklinde ifade edilmesini sağlar.

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift} dt$$

Fourier dönüşümü sonucunda elde edilen $G(f)$ fonksiyonu zamanın (t) değil frekansın (f) bir fonksiyonu olup $g(t)$ fonksiyonunun f frekansındaki gücünü gösterir. $G(f)$, $g(t)$ 'nin “spektrumu” olarak da adlandırılır. $g(t)$ fonksiyonuna $G(f)$ fonksiyonundan ters Fourier dönüşümü ile geçilir.

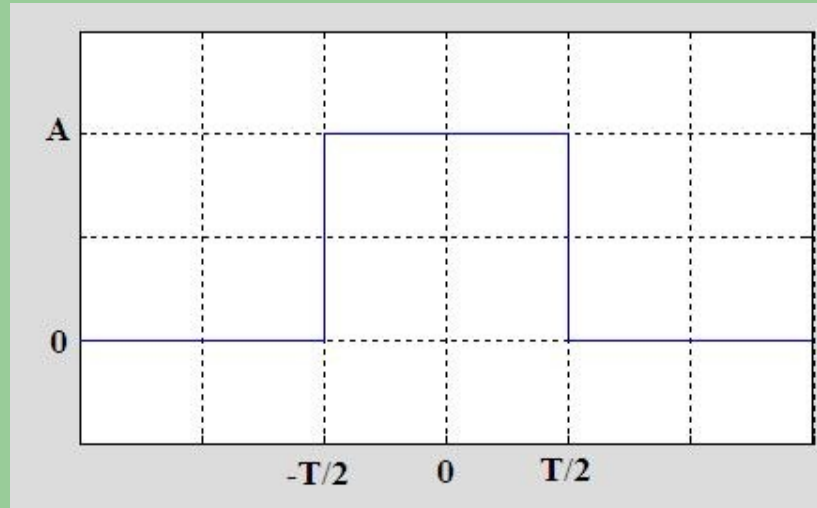
$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{2\pi ift} df = g(t)$$

$G(f)$ ve $g(t)$ bir **Fourier Çifti** olarak adlandırılır.

$$g \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} G$$

Örnek 1: Kutu Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

Kare fonksiyonunun özel bir hali olan kutu fonksiyonu (kare atım fonksiyonu da denir) aşağıdaki grafikte verilmiştir. Fonksiyon, $[-T/2, T/2]$ aralığında A'ya $|t| > T/2$ için ise 0'a eşittir.

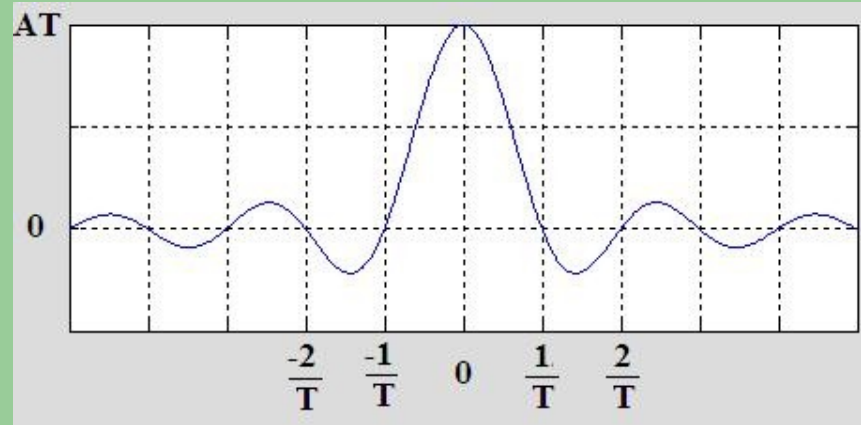


Fourier dönüşümünün tanımı uygulanacak olursa, kutu fonksiyonunun Fourier dönüşümünün sinc fonksiyonu olduğu görülür. Burada;

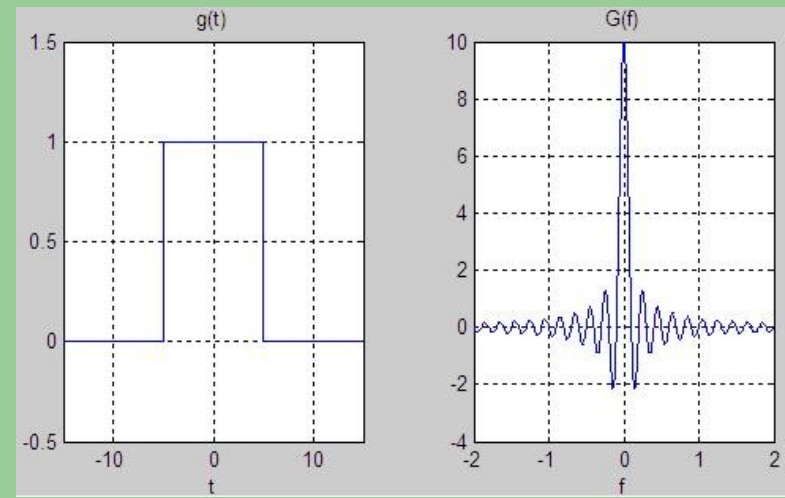
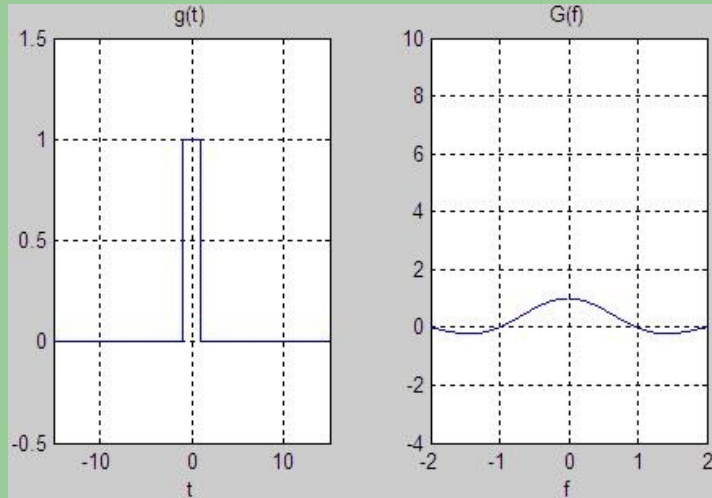
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t)\} &= G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i f t} dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-2\pi i f t} dt = \frac{A}{-2\pi i f} \left[e^{-2\pi i f t} \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{A}{-2\pi i f} \left[e^{-\pi i f T} - e^{\pi i f T} \right] = \frac{AT}{\pi f T} \left[\frac{e^{\pi i f T} - e^{-\pi i f T}}{2i} \right] \\ &= \frac{AT}{\pi f T} \sin(\pi f T) = AT [\text{sinc}(fT)]\end{aligned}$$

Örnek 1: Kutu Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü



$T = 1$ ve $T = 10$ için Fourier Dönüşümü aşağıdaki gibidir.



Yukarıdaki iki grafikten yavaş değişen geniş bir kare dalganın (üstte sağda), dar bir kare dalgaya göre (üstte solda) daha dar Fourier dönüşümüne sahip olduğu görülmektedir. Bu daha yavaş değişen fonksiyonların yüksek frekanslarda daha az enerji içerdiği şeklinde genelleştirilebilir.

Fourier Dönüşümünün Özellikleri

1) Lineerlik

$$\mathcal{F}\{c_1g(t) + c_2h(t)\} = c_1G(f) + c_2H(f)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{c_1g(t) + c_2h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} c_1g(t)e^{-i2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} c_2h(t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft} dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &= c_1G(f) + c_2H(f)\end{aligned}$$

2) Kaydırma

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-a)e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i2\pi f(u+a)} du \\ &= e^{-i2\pi fa} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i2\pi fu} du \\ &= e^{-i2\pi fa} G(f)\end{aligned}$$

Görüldüğü üzere orjinal $g(t)$ fonksiyonunun zamanda a kadar kaydırılmış olması onun değişim frekans içeriğini değiştirmez ($G(f)$), sadece evresini değiştirir.

3) Ölçeklendirme

$$\mathcal{F}\{g(ct)\} = \frac{G(\frac{f}{c})}{|c|}$$

Fourier Dönüşümünün Özellikleri

4) Türev

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = i2\pi f \cdot G(f)$$

5) Konvolüsyon

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

olmak
üzere

$$\mathcal{F}\{g(t) * h(t)\} = G(f)H(f)$$

6) Çarpma (Modülasyon)

$$\mathcal{F}\{g(t)h(t)\} = G(f) * H(f)$$

7) Parseval Teoremi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

Görüldüğü üzere orjinal $g(t)$ fonksiyonu ile $G(f)$ aynı enerji içeriğine sahiptir. Sadece biri diğerinin başka bir tanım kümesindeki ifadesidir.

8) Düalite Özelliği

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift} dt$$



$$\mathcal{F}\{G(t)\} = g(-f)$$

Kaynaklar

www.thefouriertransform.com