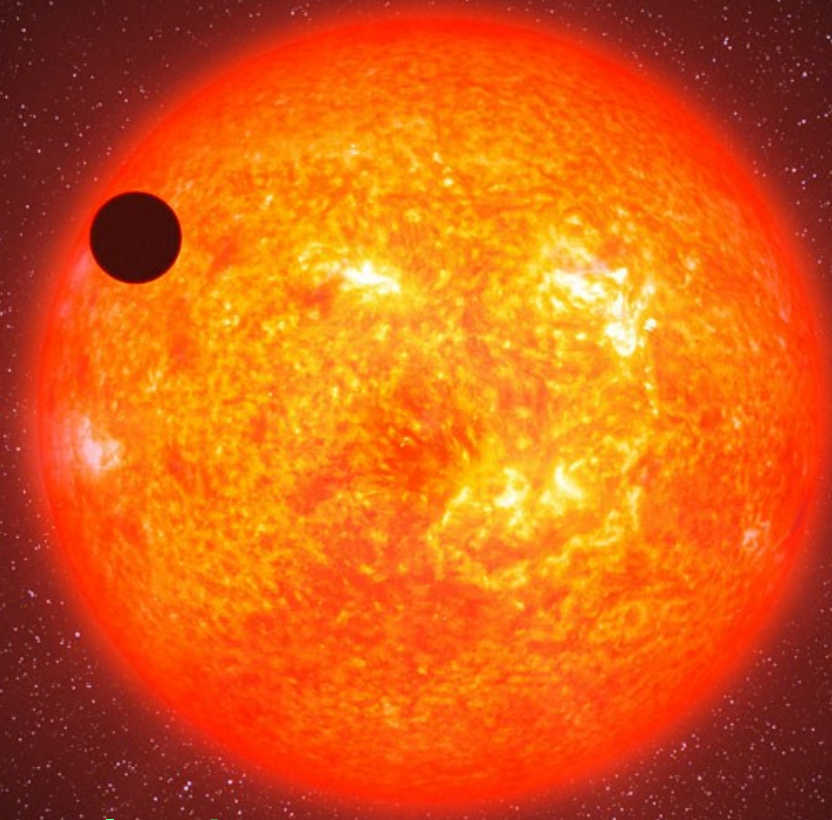




AST418

Gezegen Sistemleri
ve Oluşumu

Ders 4b : Geçiş Yöntemi

Yöntemin Temelleri - Parametreler

Bir geçişin parametreleri: 2-Cisim Problemi

Gezegenler için hareket denklemini hatırlayalım

$$\ddot{\vec{r}} + G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r} = 0$$

Hareket denkleminde yola çıkararak gezegenin hareketinin bir elips üzerinde olduğunu (Kepler 1. Yasa) gösterdik. Gezegenle yıldız arasındaki uzaklık:

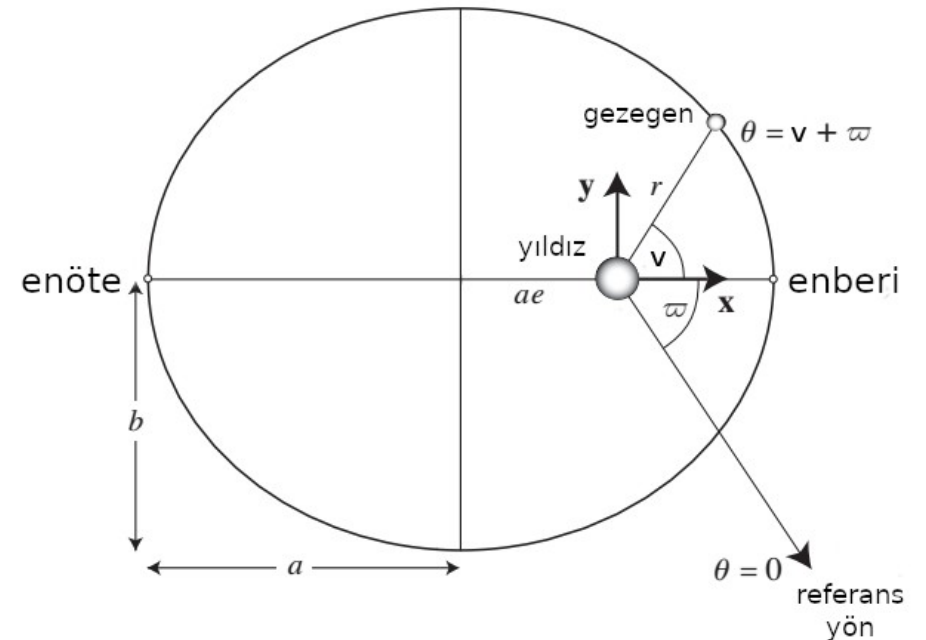
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)}$$

Denklemin çözümünde gelen sabitlerin geometrik anlamı:

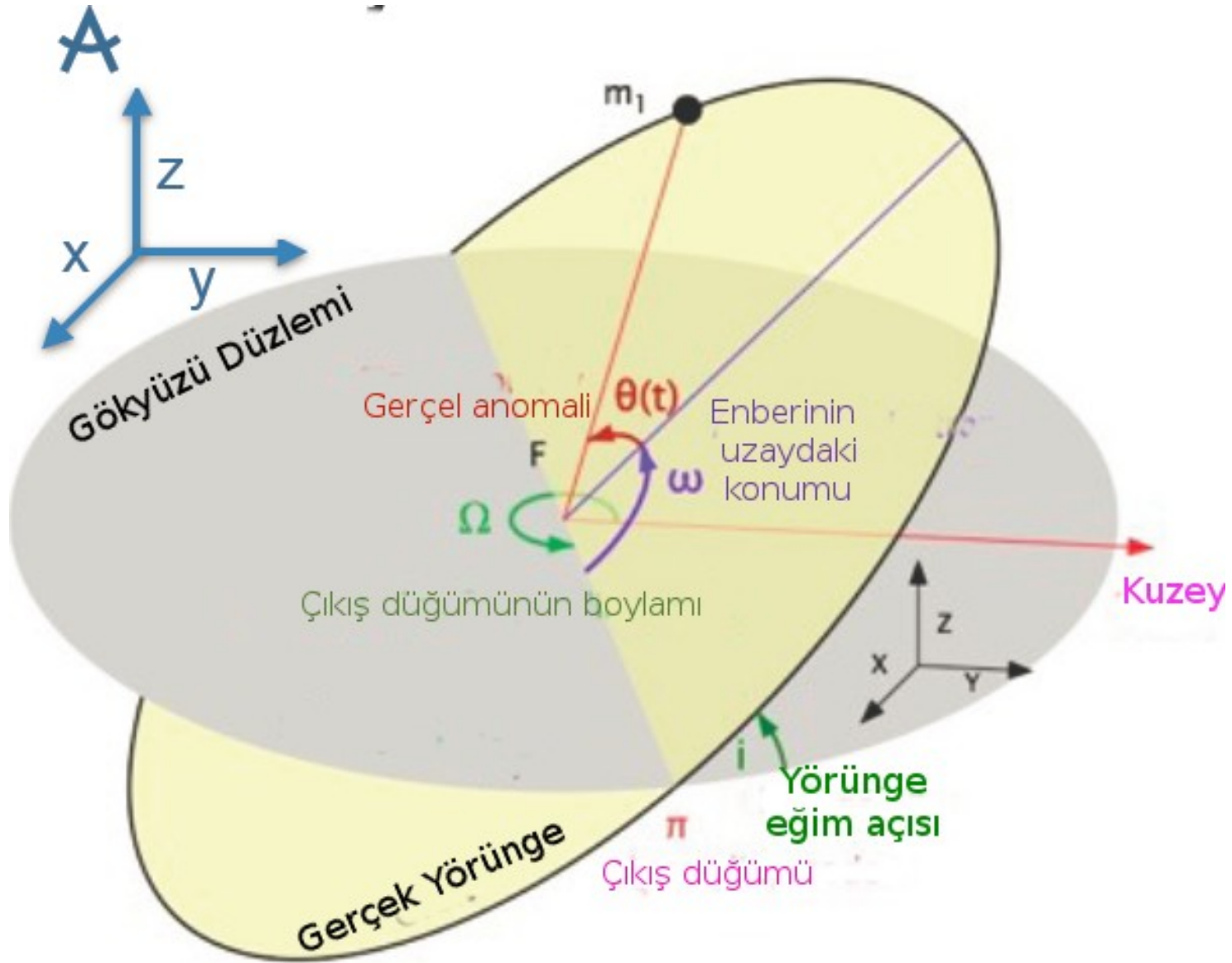
a: Elipsin yarı-büyük eksen uzunluğu

e: Elipsin dış merkezliliği

v (ya da θ): Gezegenin yörünge­in enberi noktasına açısal uzaklığı (gerçel anomali)



Yörünge Parametreleri





Problemi 3-boyutta ele alırsak:

Kartezyen koordinat sisteminde:

$$X = r \cos(\omega + \theta) \cos(\Omega) - \sin(\Omega) \sin(\omega + \theta) \cos(i)$$

$$Y = r \cos(\omega + \theta) \sin(\Omega) + \cos(\Omega) \sin(\omega + \theta) \cos(i)$$

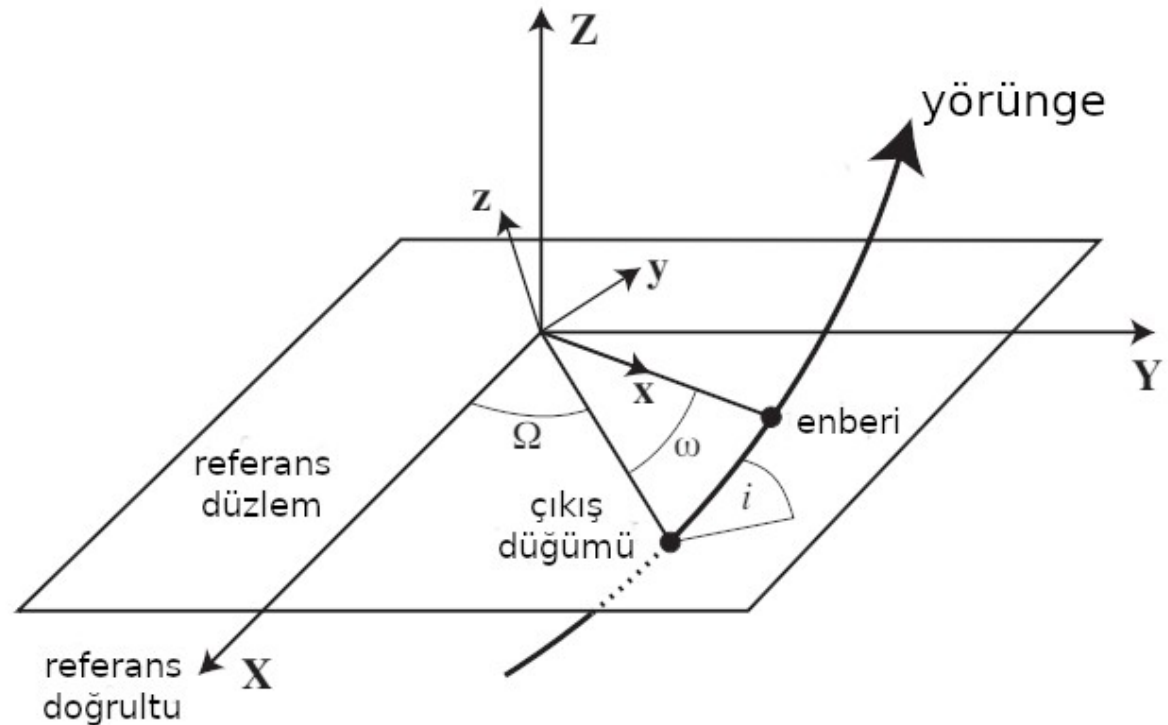
$$Z = r \sin(\omega + \theta) \sin(i)$$

Referans yön için düğümler doğrultusunun özel bir durumunu ($\Omega = 180^\circ$) seçmemizde bir sakınca yoktur.

$$X = -r \cos(\omega + \theta)$$

$$Y = -r \sin(\omega + \theta) \cos(i)$$

$$Z = r \sin(\omega + \theta) \sin(i)$$



Bir Gezegen Geçişi Ne Zaman Gerçekleşir?

$r_{gök}$ gökyüzünde gezegenin disk merkezi ile yıldızın disk merkezi arasındaki uzaklık olsun

$$r_{gök} = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$

Bir gezegen geçişinin gerçekleşmesi için bu uzaklığın yıldızın yarıçapından küçük olması gerekir.

$$r_{gök} = \sqrt{((-r \cos(\omega + \theta))^2 + (-r \sin(\omega + \theta) \cos(i))^2)} \rightarrow r_{gök} = \sqrt{(r^2 \cos^2(\omega + \theta) + r^2 \sin^2(\omega + \theta) \cos^2(i))}$$

r 'yi karekökten çıkarır $\cos^2(\omega + \theta)$ yerine $1 - \sin^2(\omega + \theta)$ koyacak olursak

$$r_{gök} = r \sqrt{(\cos^2(\omega + \theta) + \sin^2(\omega + \theta) \cos^2(i))} \rightarrow r_{gök} = r \sqrt{(1 - \sin^2(\omega + \theta) + \sin^2(\omega + \theta) \cos^2(i))}$$

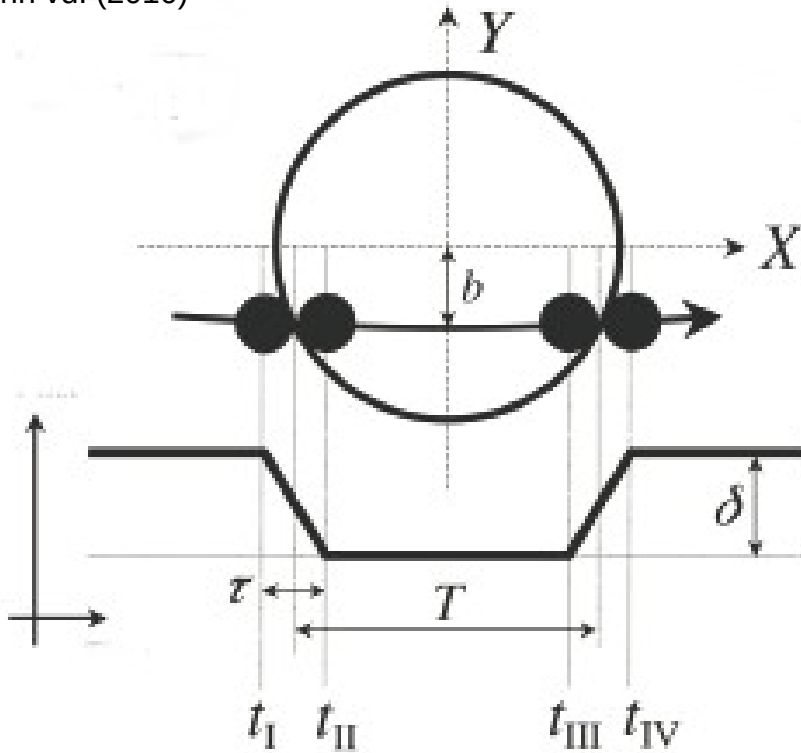
$$r_{gök} = r \sqrt{(1 - \sin^2(\omega + \theta)(1 - \cos^2(i)))} \rightarrow r_{gök} = r \sqrt{(1 - \sin^2(\omega + \theta) \sin^2(i))}$$

Böylece $r_{gök}$ elde edilmiş olur. Yapılması gereken artık bu ifade için bir minimum bulup, yıldızın yarıçapı ile karşılaştırmaktır. r yerine iki cisim probleminde hareket denkleminin çözümü (bkz. Ders-3 Dikine Hız) konduğunda aşağıdaki ifade elde edilir. $r_{gök}$ ifadesinin minimizasyonuna ilişkin geniş bir açıklamaya Kipping (2008)'de bulabilirsiniz.

$$r_{gök} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\theta)} \sqrt{(1 - \sin^2(\omega + \theta) \sin^2(i))} \Rightarrow r_{gök, min} \leq R_*$$

Bir Geçişin Parametreleri

Winn vd. (2010)



$R_* \ll a$ için

$$X = \pm R_* \sqrt{(1 - b^2)}$$

$$Y = b R_*$$

b : etki parametresi

δ : Geçiş derinliği (depth) ya da kontrast

$t_{I, II, III, IV}$: Geçiş zamanları

$\tau_{ing} = t_{II} - t_I$: Geçiş başlangıcı (ingress) zaman ölçeği

$\tau_{eg} = t_{IV} - t_{III}$: Geçiş sonu (egress) zaman ölçeği

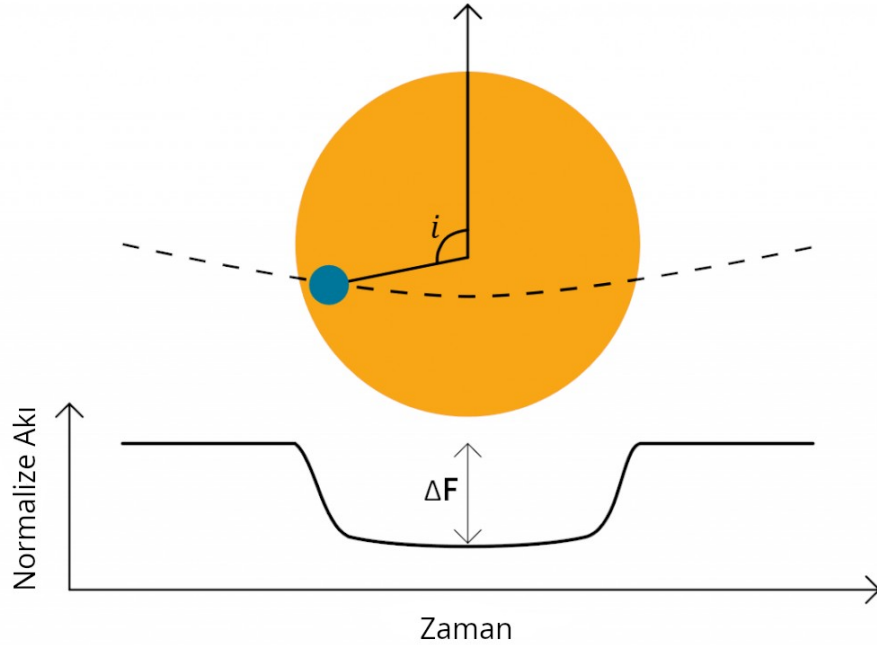
T_{14}, T_T : Toplam geçiş süresi, $T = T_t - \tau$ ($e = 0$)

T_{23}, T_F : Geçiş süresi, $T_F = T_T - 2\tau$ ($e = 0$)

R_g, M_g, R_*, M_* : Gezegen (g) ve yıldızın (*) yarıçap ve kütleleri

$$k = \sqrt{\delta} = R_g / R_*$$

Geçiş Işık Eğrisinin Derinliği ($\delta_{\text{geçiş}}$) Yarıçaplar Oranı (k)



Bir gezegen geçişi sırasında yıldızdan alınan ışığın zamanla değişimin gösteren grafiğe geçiş ışık eğrisi adı verilir. Gezegen geçişleri, gezegen yörüngesinin bakış doğrultusuna dik düzlemle (gökyüzü düzlemi) yaptığı açı (yörünge eğim açısı, i) 90° 'ye yakın olduğu için gerçekleşir.

Işık Değişim Genliği ($\Delta F = \delta_{\text{geçiş}}$)

Geçiş sırasındaki ışık kaybı gezegenin yıldız diski üzerinde kapattığı alandan foton alınamadığı için gerçekleşir. Bu nedenle oransal olarak;

$$\Delta F = \delta_{\text{geçiş}} \approx \frac{\pi R_g^2}{\pi R_*^2} = \frac{R_g^2}{R_*^2}$$

ile verilir. Bundan dolayı geçiş derinliğini doğrudan belirlemek üzere ışık eğrileri, geçiş dışındaki ışık seviyesine normalize edilerek (bölünerek) -kadir biriminde değil- normalize akı birimlerinde verilir.

Bu parametre yıldız yarıçapının bilinmesi durumunda gezegen yarıçapının bulunmasını sağladığı için çok önemlidir ve **yarıçaplar oranı (k)** olarak da adlandırılır.

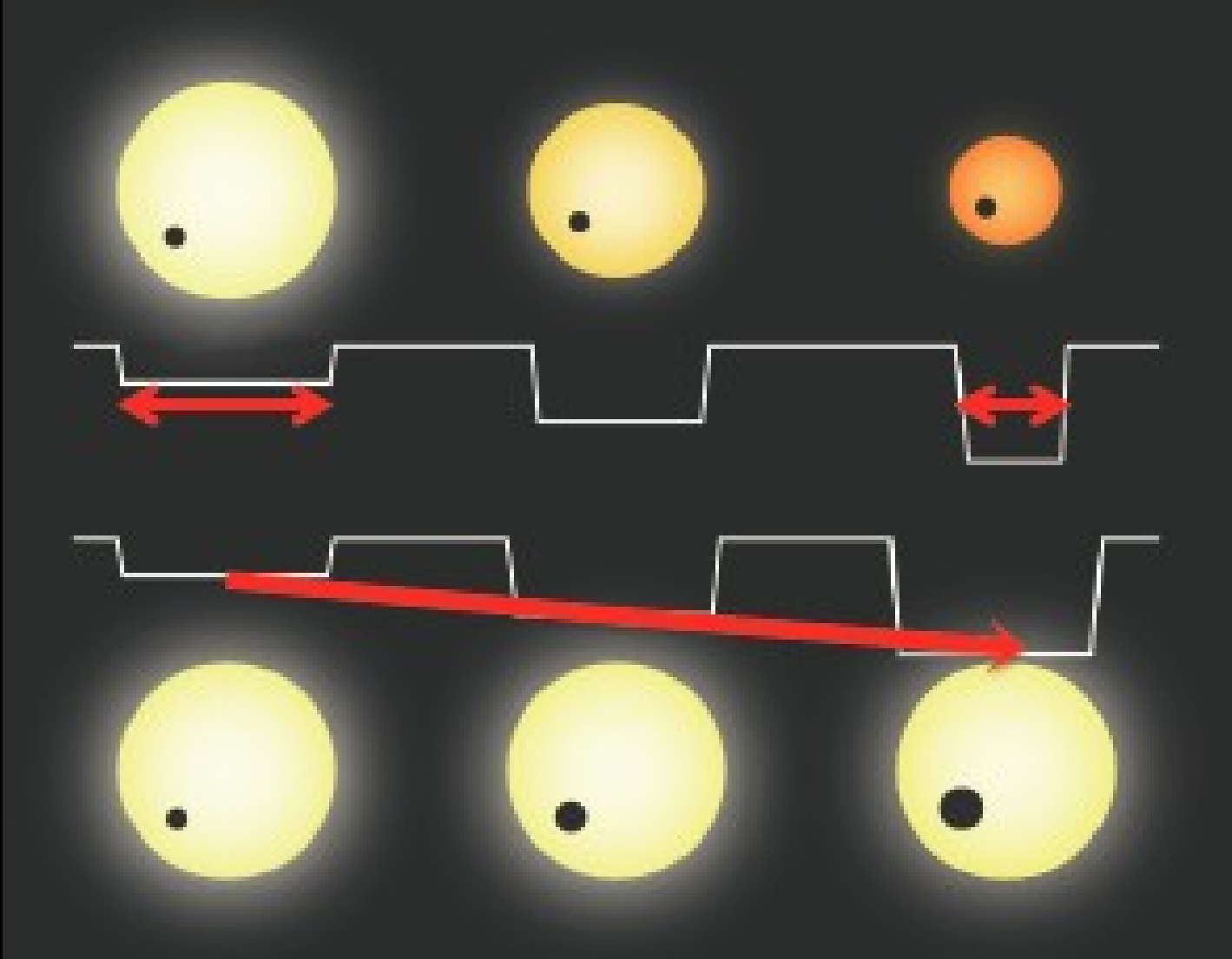
$$\sqrt{\delta_{\text{geçiş}}} \approx k = \frac{R_g}{R_*}$$

Yıldız yarıçapları, düşük / yüksek çözünürlüklü tayfların ve yıldızın geniş bant parlaklıklarının yıldız atmosferi ve tayfsal enerji dağılımı modelleri ile modellenmesi sonucu elde edilerek gezegen yarıçapına geçilerek bu temel parametre (R_g) de gözlemler sonucu elde edilmiş olur.

Farklı
büyüklüklerde
yıldızlar

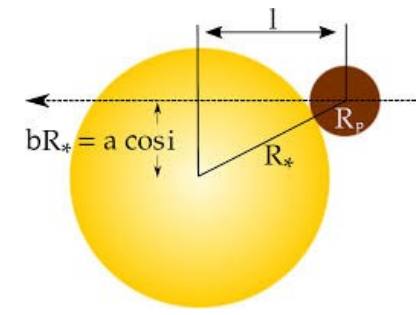
Farklı
büyüklüklerde
gezegenler

Geçiş
Derinliği



Geçiş Süresi

Etki Parametresi (Geçiş, $b_{\text{geçiş}}$)



Etki Parametresi (b), geçiş ortası için gezegenin disk merkezi ile yıldızın disk merkezi arasındaki görünen uzaklıktır ve yıldız yarıçapı cinsinden ifade edilir.

Başlangıçta işimiz gerçek düğümler doğrultusunu bulmak olmadığından referans yön ile arasındaki açıyı istediğimiz gibi belirleyebiliriz. Diyelim ki geçiş düğümler doğrultusu üzerinde gerçekleşsin ($X = 0$).

Bu durumda **geçiş** iç kavuşum anına karşılık gelir ($\theta = \pi / 2 - \omega$) **örtme** ise dış kavuşum anında gerçekleşir ($\theta = -\pi / 2 - \omega$).

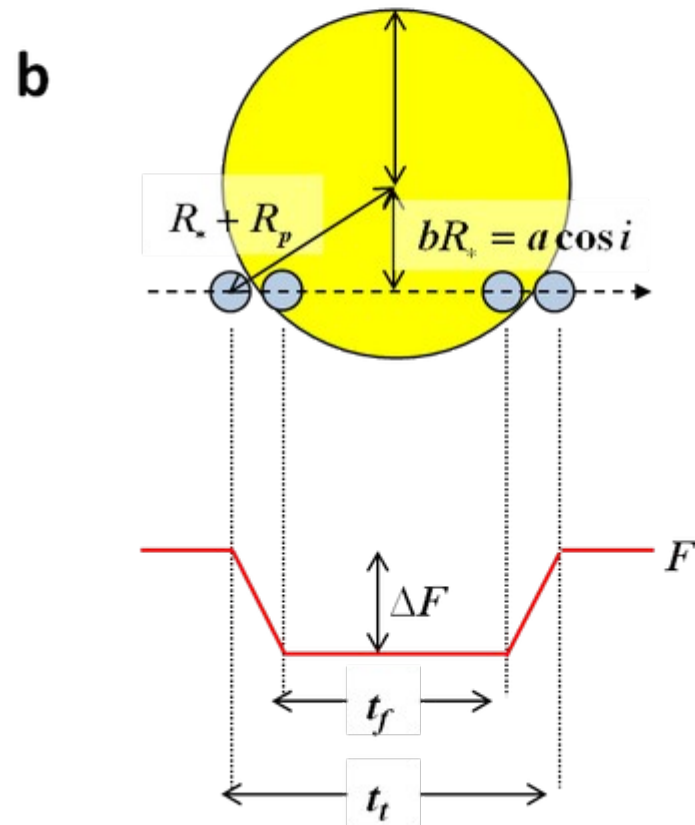
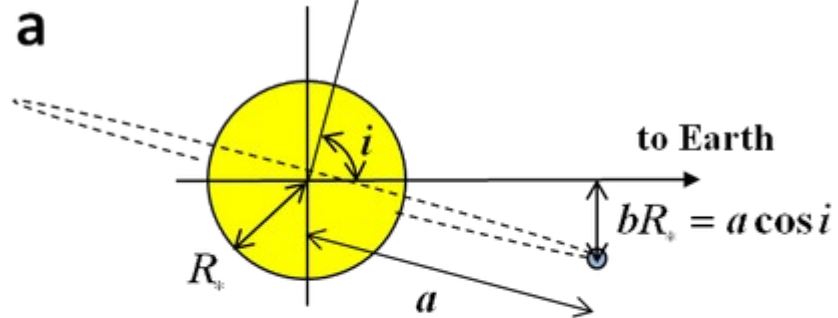
Gezegenle yıldız diski arasında herhangi bir zamanda gökyüzü düzlemi üzerindeki uzaklık $r_{\text{gök}}$, geçiş ortasında **etki parametresini (b)** tanımlamak için kullanılabilir.

$$b = \frac{r_{\text{gök}}}{R_*} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\theta)} \sqrt{(1-\sin^2(\omega+\theta)\sin^2(i))} \frac{1}{R_*}$$

Geçiş anı için ($\theta = \pi / 2 - \omega$) alınırsa;

$$b_{\text{geçiş}} = \frac{r_{\text{gök}}}{R_*} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\pi/2-\omega)} \sqrt{(1-\sin^2(\omega+\pi/2-\omega)\sin^2(i))} \frac{1}{R_*} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \sin(\omega)} \sqrt{(\cos^2(i))} \frac{1}{R_*}$$

$$b_{\text{geçiş}} = \frac{a \cos(i)}{R_*} \frac{(1-e^2)}{1+e \sin(\omega)}$$



Haswell (2010)

Etki Parametresi (Örtme, $b_{\text{örtme}}$)

Benzer şekilde örtme anı için de etki parametresi ($b_{\text{örtme}}$) tanımlanabilir.

$$b = \frac{r_{\text{gök}}}{R_*} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\theta)} \sqrt{(1-\sin^2(\omega+\theta)\sin^2(i))} \frac{1}{R_*}$$

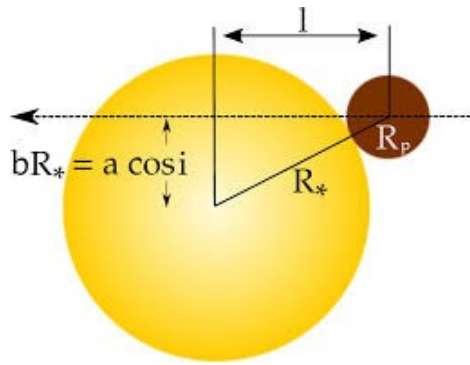
Örtme anı için gerçel anomali değeri dış kavuşum için girilirse ($\theta = -\pi/2 - \omega$)

$$b_{\text{örtme}} = \frac{r_{\text{gök}}}{R_*} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(-\pi/2-\omega)} \sqrt{(1-\sin^2(\omega-\pi/2-\omega)\sin^2(i))} \frac{1}{R_*} = \frac{a(1-e^2)}{1-e \sin(\omega)} \sqrt{(\cos^2(i))} \frac{1}{R_*}$$

$$b_{\text{örtme}} = \frac{a \cos(i)}{R_*} \frac{(1-e^2)}{1-e \sin(\omega)}$$

Geçiş Süresi (T_{14}) ve Geçiş Uzunluğu (l)

Bir gezegenin yıldızının önünden ne sürede geçeceğini (ing. transit duration) belirleyen temel parametre etki parametresidir.



Geçiş Uzunluğu (l):

$$l = \sqrt{(R_* + R_p)^2 - (bR_*)^2}$$

Geçiş Süresi (T_{14}):

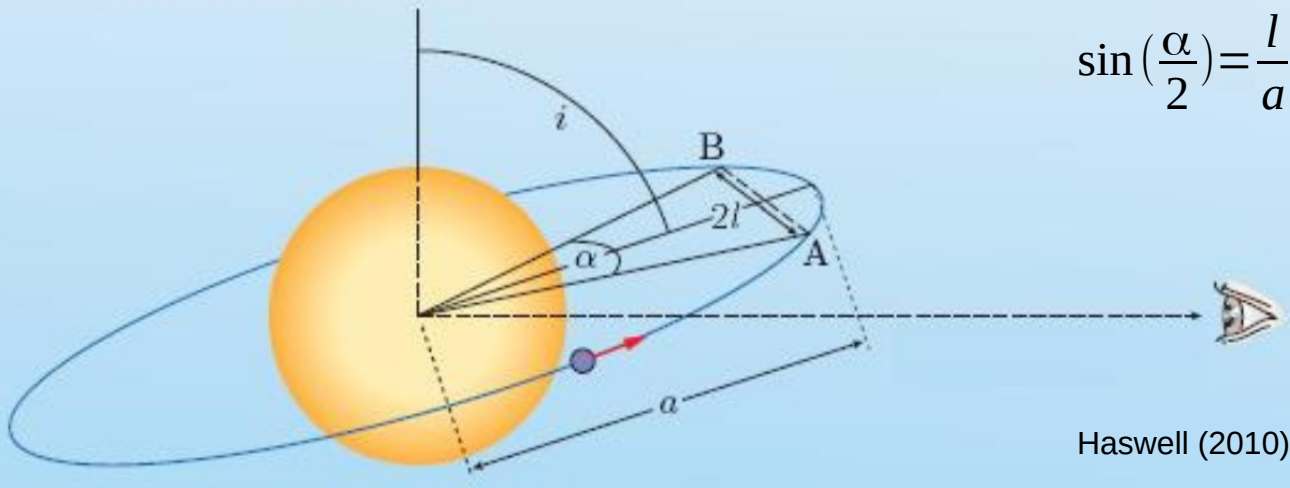
Gezegen tarafından $P_{yör}$ yörünge döneminde 2π açı taranırsa α açısı T_{14} (geçiş süresi) içerisinde taranır.

$$T_{14} = P_{yör} \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$T_{14} = \frac{P_{yör}}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)$$

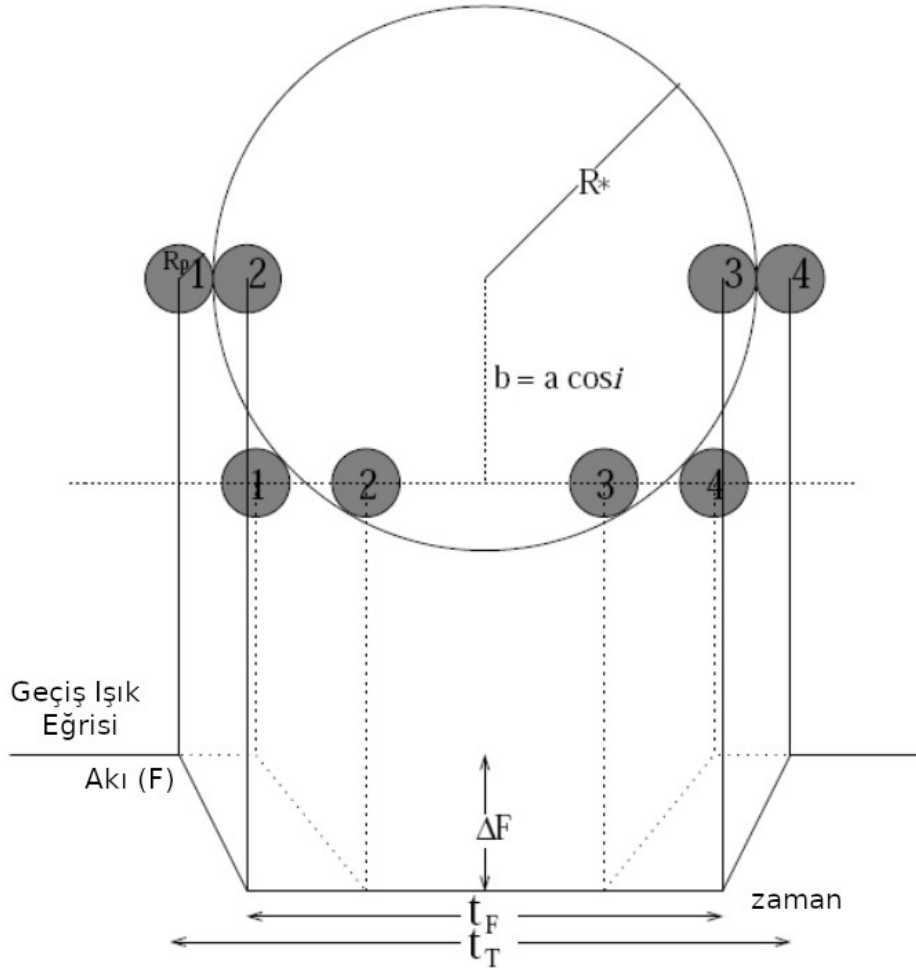
$$T_{14} = \frac{P_{yör}}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{(R_* + R_p)^2 - (bR_*)^2}}{a}\right)$$

$$t_T = T_{14} = \frac{P_{yör}}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{(R_* + R_p)^2 - (a \cos i)^2}}{a}\right)$$



Geçiş Zamanları ($T_{14} = t_T$, $T_{23} = t_F$)

Seager & Ornelas (2003)



Yandaki şekilde **toplam geçiş zamanı** $t_T = T_{14}$ ifadesinde b yerine konacak olursa;

$$t_T = \frac{P_{yör}}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{(R_* + R_g)^2 - a^2 \cos^2 i}}{a} \right)$$

$$t_T = \frac{P_{yör}}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{R_*}{a} \sqrt{\left(1 + \frac{R_g}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i\right)^2} \right)$$

Benzer şekilde **tam geçiş zamanı** $t_F = T_{23}$ ifadesi de aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$t_F = \frac{P_{yör}}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{R_*}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{R_g}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i\right)^2} \right)$$

Yıldız Yarıçapına Ölçekli Yörünge Büyüklüğü (a / R_*)

$t_T = T_{14}$ ve $t_F = T_{23}$ ifadelerinin her iki tarafının sinüsü alınıp birbirine bölünecek olursa;

$$t_T = \frac{P_{yör}}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{R_*}{a} \sqrt{\left(1 + \frac{R_g}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i\right)^2} \right) \quad t_F = \frac{P_{yör}}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{R_*}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{R_g}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i\right)^2} \right)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{t_F \pi}{P}\right)}{\sin\left(\frac{t_T \pi}{P}\right)} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{R_g}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i\right)^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_g}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i\right)^2}} \quad \text{ifadesinden} \quad \frac{a}{R_*} \cos i \quad \text{çekilir ve} \quad \left(\frac{R_g}{R_*}\right) = k = \sqrt{\delta} \quad \text{konursa;}$$

$$b \equiv \frac{a}{R_*} \cos i = \sqrt{\frac{(1-k)^2 - [\sin^2(\frac{t_F \pi}{P}) / \sin^2(\frac{t_T \pi}{P})](1+k)^2}{1 - [\sin^2(\frac{t_F \pi}{P}) / \sin^2(\frac{t_T \pi}{P})]}}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki parametrelerin tamamı gözlemseldir ve etki parametresinin bulunmasını sağlar

Ayrıca $t_F = \frac{P_{yör}}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{R_*}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{R_g}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a}{R_*} \cos i\right)^2} \right) \Rightarrow \frac{a}{R_*} = \frac{\sqrt{(1-k)^2 - b^2}}{\sin\left(\frac{t_F \pi}{P}\right)}$ bulunmuş olur!

Bu da **yörünge eğim açısının (i)** bulunduğuna anlamına gelir. $i = \cos^{-1} \left(\frac{b R_*}{a} \right)$

Ortalama Yıldız Yoğunluğu (ρ_*)

Kepler'in 3. yasasının Newton formunda $\frac{a^3}{P^2} = G \left(\frac{M_* + M_g}{4\pi^2} \right)$

$M_g \ll M_*$ kabulü yapılarak M_* çekilir ve her iki taraf yıldızın hacmine bölünecek olursa;

$$\frac{M_*}{\frac{4}{3}\pi R_*^3} = \rho_* = \frac{3\pi}{G P^2} \left(\frac{a}{R_*} \right)^3 \quad \text{bulunur ki bu da } \textbf{ortalama yıldız yoğunluğunun } (\rho_*) \text{ bulunmasını sağlar.}$$

Tüm bu ifadeler çembersel yörünge için elde edilmiş olmakla birlikte $a \rightarrow \frac{a(1-e^2)}{1+e \sin(\omega)}$ dönüşümüyle

Dışmerkezli ($e > 0$) yörüngeler için:

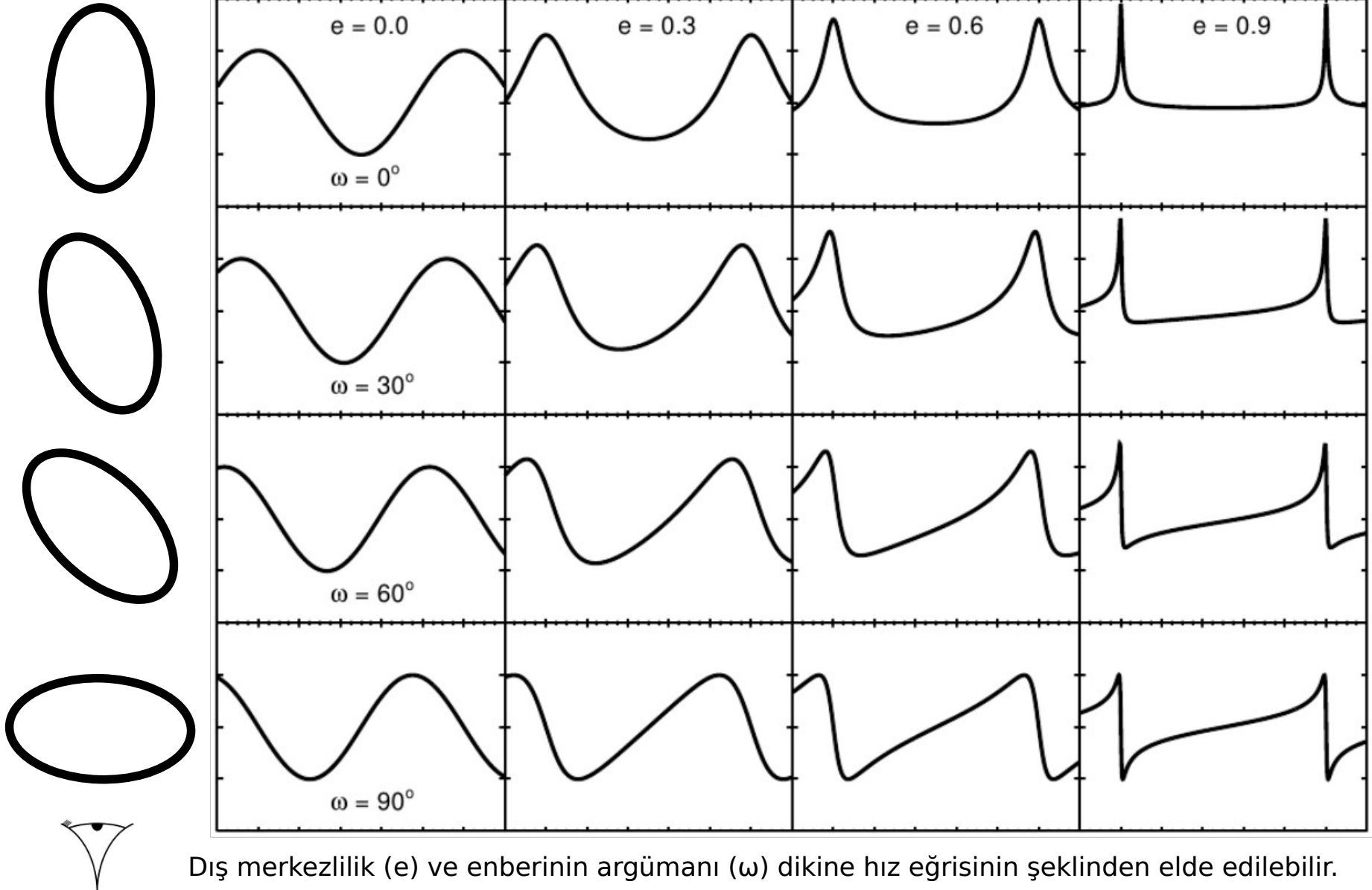
$$b \equiv \frac{a}{R_*} \cos i = \sqrt{\frac{(1-\delta)^2 - [\sin^2(\frac{t_F \pi}{P}) / \sin^2(\frac{t_T \pi}{P})] (1+\delta)^2}{1 - [\sin^2(\frac{t_F \pi}{P}) / \sin^2(\frac{t_T \pi}{P})]}} \frac{1+e \sin(\omega)}{(1-e^2)}$$

T_F, T_T, P, δ geçiş ışık eğrisinden, e, ω ise dikine hız eğrisinden elde edilen gözlemsel parametrelerdir.

$$\frac{a}{R_*} = \frac{(1+\delta)^2 - b^2 [1 - \sin^2(\frac{t_T \pi}{P})]}{\sin^2(\frac{t_T \pi}{P})} \frac{1+e \sin(\omega)}{(1-e^2)}$$

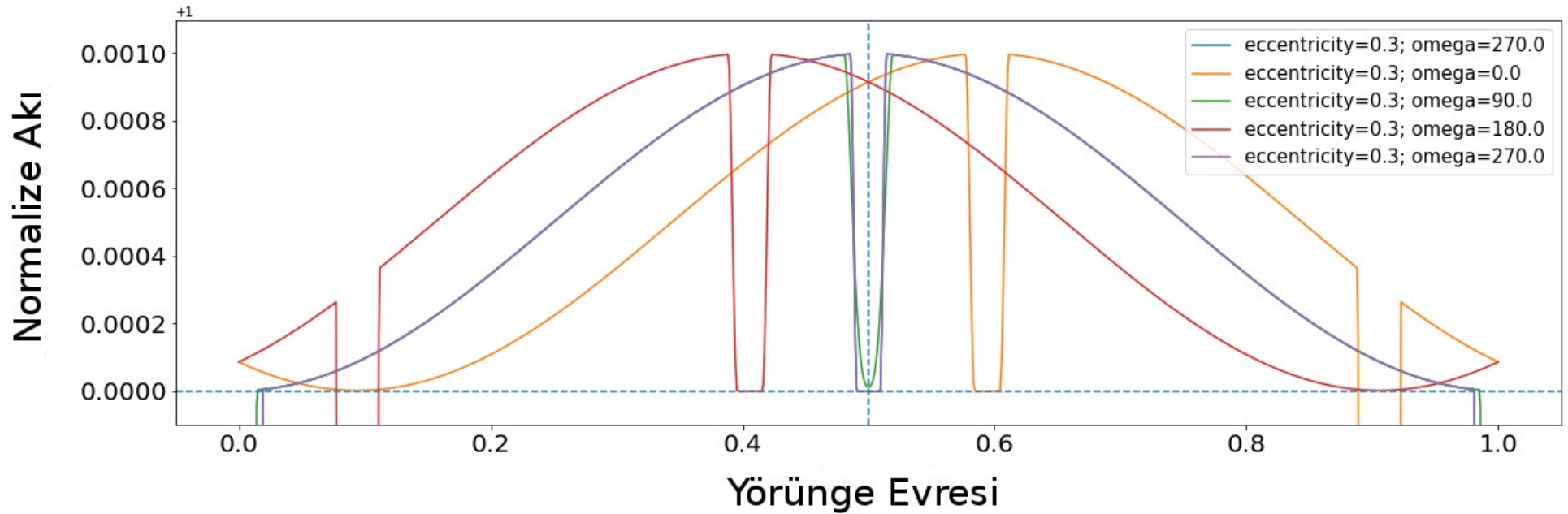
$$\frac{M_*}{\frac{4}{3}\pi R_*^3} = \rho_* = \frac{3\pi}{G P^2} \left(\frac{\sqrt{(1-\delta)^2 - b^2}}{\sin^2(\frac{t_F \pi}{P})} \right)^3 \left(\frac{1+e \sin(\omega)}{(1-e^2)} \right)^3$$

Yörünge Dış Merkezliliği (e) Enberinin Argümanı (ω)



Yörünge Dış Merkezliliği (e) Enberinin Argümanı (ω)

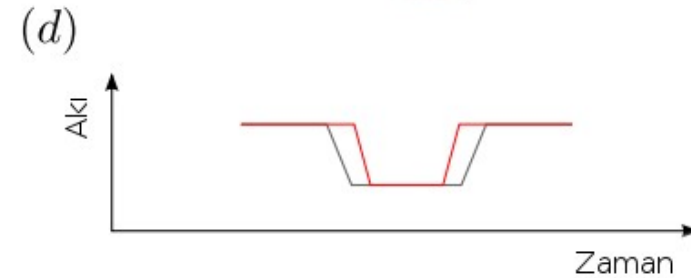
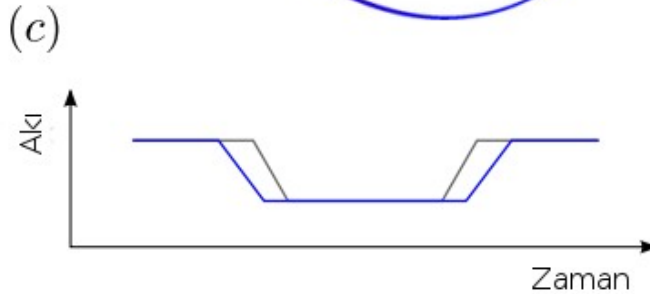
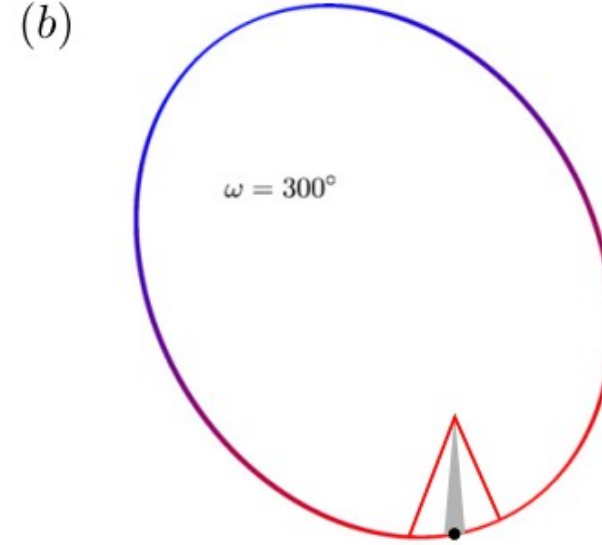
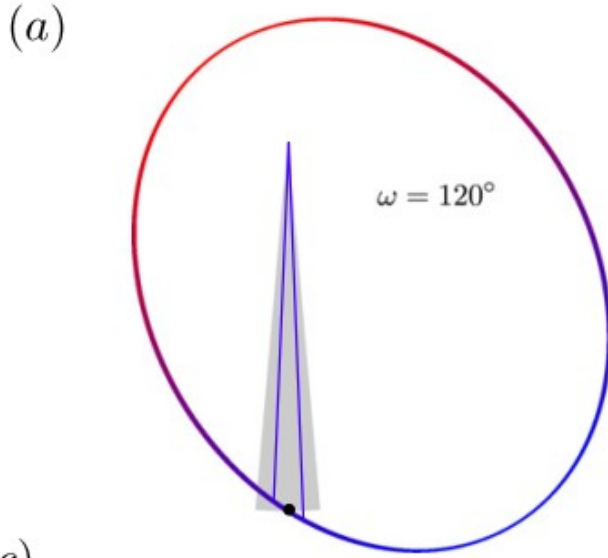
$$\Delta t_c = t_{\text{örtme}} - t_{\text{geçiş}} = \frac{P}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi} e \cos \omega \right]$$



Dışmerkezlilik (e) ve enberinin argümanı (ω) gezegenin örtülme sinyalinin şekli ve evresinden elde edilebilir. Yörünge çembersel olması durumunda (e = 0) örtmenin yörünge evresi 0.5 olacak ve yörünge argümanının bir anlamı kalmayacaktır. Dış merkezli yörüngeler için ise **e cos ω** parametresi belirlenebilir. Gezegenin örtülmesi sırasında ışık kaybı çok küçük olacağı için bu tür gözlemler ancak uzaydan ve uzun dalgalarda yapılabilir. 2020 yazında “emekliye ayrılan” Spitzer Uzay Teleskobu bu amaçla çok kez kullanılmıştır.

Yörünge Dış Merkezliliği (e) Enberinin Argümanı (ω)

$$\frac{T_{\text{örtme}}}{T_{\text{geçiş}}} = \frac{1 + e \sin \omega}{1 - e \sin \omega}$$



van Eylen 2015

Dış merkezli bir yörüngede gezegenin hızı sürekli değişeceğinden geçiş süreleri doğrudan etkilenir. Geçiş boyunca dahi gezegenin hızı değiştiğinden geçiş başlangıcı zaman ölçeği (ingress, τ_{ing}) ve geçiş çıkışı zaman ölçeği (egress, τ_{eg}) arasında fark olur. Bu fark dış merkezliliğin ve enberinin argümanının ($e \cos \omega$ aracılığıyla) belirlenmesine yardımcı olur. Yukarıdaki şekillerde aynı dış merkezlilikte iki yörünge için farklı ω açılarına denk gelen geçiş sinyalleri (renkli) ve çembersel durum için geçiş sinyali (gri) verilmektedir. (van Eylen 2015)

Kaynaklar

- ✓ Charbonneau, David; Brown, Timothy M.; Latham, David W.; Mayor, Michel, 2000, "*Detection of Planetary Transits Across a Sun-like Star*", The Astrophysical Journal, 529, L45-L48
- ✓ Haswell, C. A., 2010, "Transiting Exoplanets: Measuring The Properties Of Planetary Systems", Cambridge University Press, Cambridge
- ✓ Knutson, Heather A., 2007, "*Extrasolar planets: Water on distant worlds*", Nature, 448, 143
- ✓ Madhusudhan, N.; Knutson, H.; Fortney, J. J.; Barman, T., 2014, "*Exoplanetary Atmospheres*", Protostars and Planets VI, University of Arizona Press, Tucson, 914 pp., p.739-762
- ✓ Mazeh, Tsevi, 2000, "*The Spectroscopic Orbit of the Planetary Companion Transiting HD 209458*", The Astrophysical Journal, 532, 55
- ✓ Winn, Joshua N, 2010, "*Transits and Occultations*", arXiv1001.2010W
- ✓ Yalçinkaya, S. 2018, "Ötegezegen Geçiş Işık Eğrisi Modelleri", Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Semineri