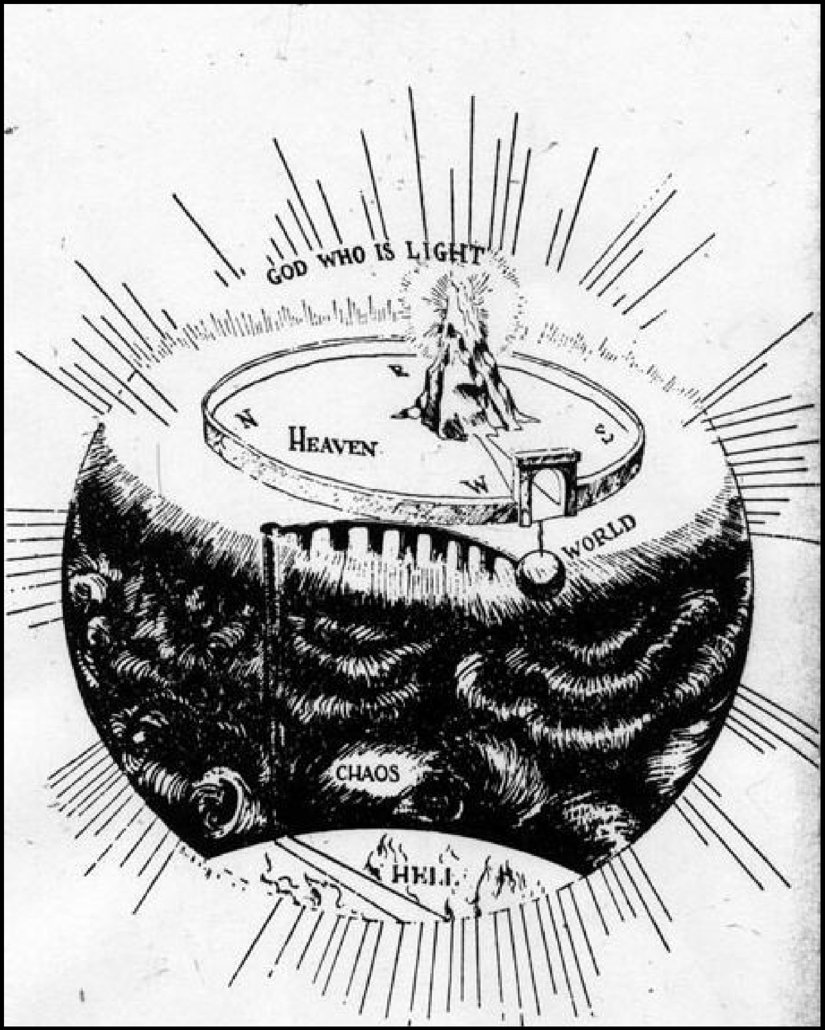
AST413
Gezegen Sistemleri ve Oluşumu

Ders 1 : Tarihçe ve Temel Yasalar

Kozmogoni

Milton'ın Evreni



Evren nedir, nasıl bir yerdir ve biz nasıl oluştuk? → Dinler ve Felsefe!

Stonehenge M.Ö. 3000-2000 @ Wiltshire, İngiltere

Kozmoloji

Evren nasıl oluştu ve nasıl çalışıyor? → Nedenselleştirme ve Bilim!

Yer Merkezli Evren Modeli:

Merkezinde hareketsiz Yer'in bulunduğu, hepsi Yer'e aynı uzaklıktaki yıldızların üstünde bulunduğu bir küre!

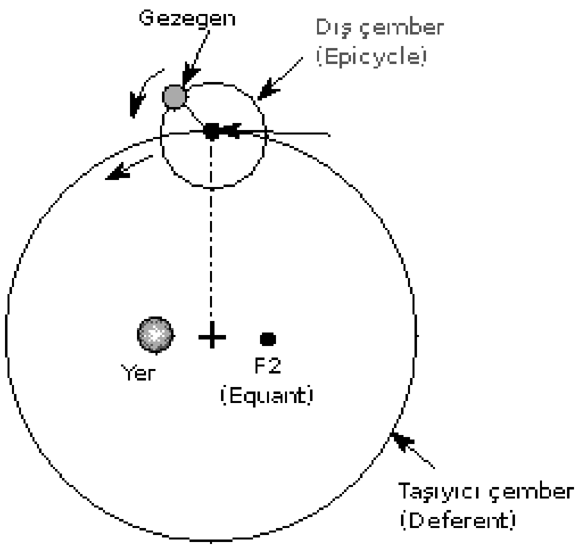
1. Yer'in küresel olduğu,
2. Yer'in büyüklüğü,
3. Tutulmalar

bu modelle açıklanabilmiştir. Ancak,

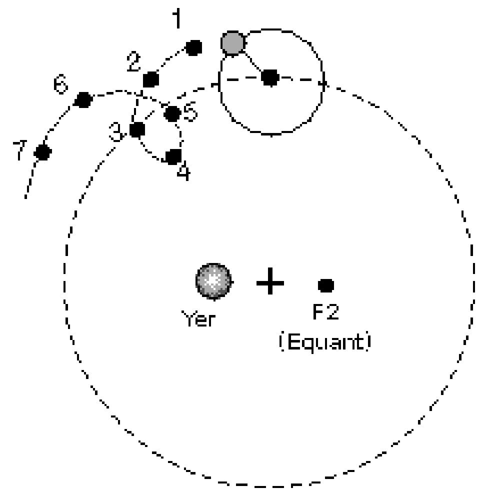
1. Hızı diğer cisimlerden farklı olanlar?
2. Sabit hızla hareket etmeyenler?
3. Geri yönlü (retrograd) hareket yapanlar?

“The School of Athens”, Raphael, 1509-1511

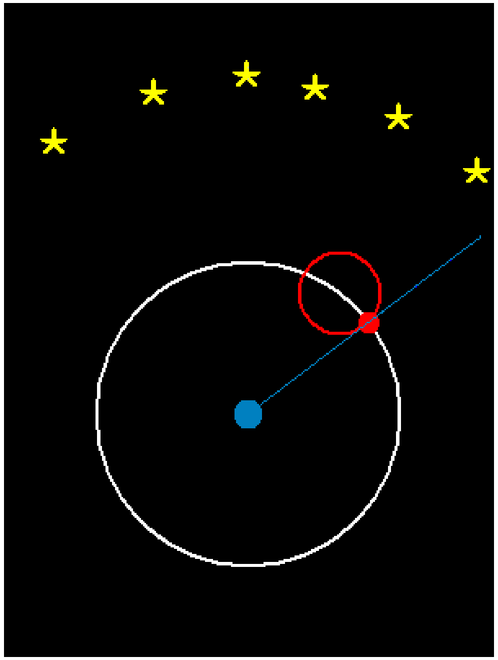
Dış Çemberlerle Retrograd Hareketi Açıklama Çabası

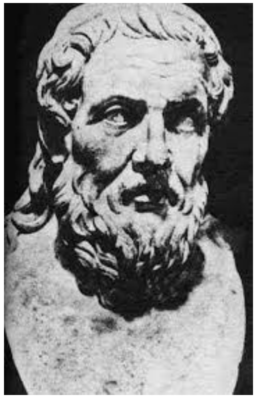


Dış çember saatin ters yönünde dönerken, merkezi de taşıyıcı çemberin üzerinde saat yönünün tersine dolanmaktadır. Dış çemberin hızı F2'ye göre sabittir. Bileşik hareket sağdaki şekilde görülmektedir.



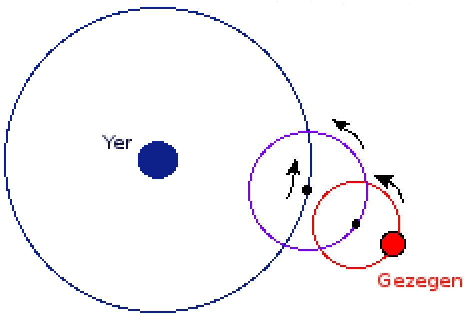
Taşıyıcı çember saat yönünün tersine (1'den 7'ye doğru) hareket etmektedir. Ancak dış çemberin hareketi nedeniyle bileşik hareket 3 ile 5 arasında ters yönlüdür (retrograd).





Perge'li Appolonius (MÖ 262 - 190)

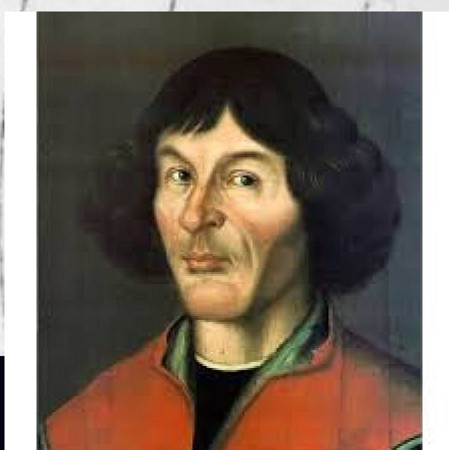
Appolonius, dış çember kullanarak geri yönlü (retrograd) hareketi, Yer'i merkezden alıp, dış çemberin merkezinin hareketini diğer odağa göre sabit yaparak sabit hızla gerçekleşmeyen hareketi de başarıyla açıklamış oldu. Ama teorisi hala gezegen gözlemlerinde ulaşılan bazı gözlemsel sonuçları açıklayamıyordu.



Batlamyus (Ptolemy) (90 – 168) bu problemi iki dış çember kullanarak gidermeye çalıştı.

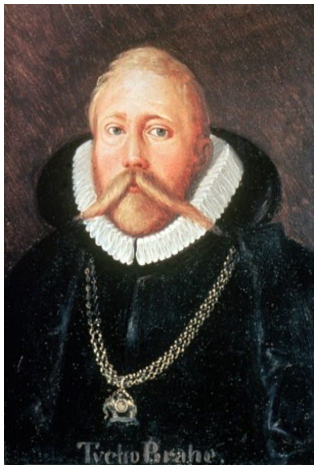
Güneş Merkezli Evren Modeli

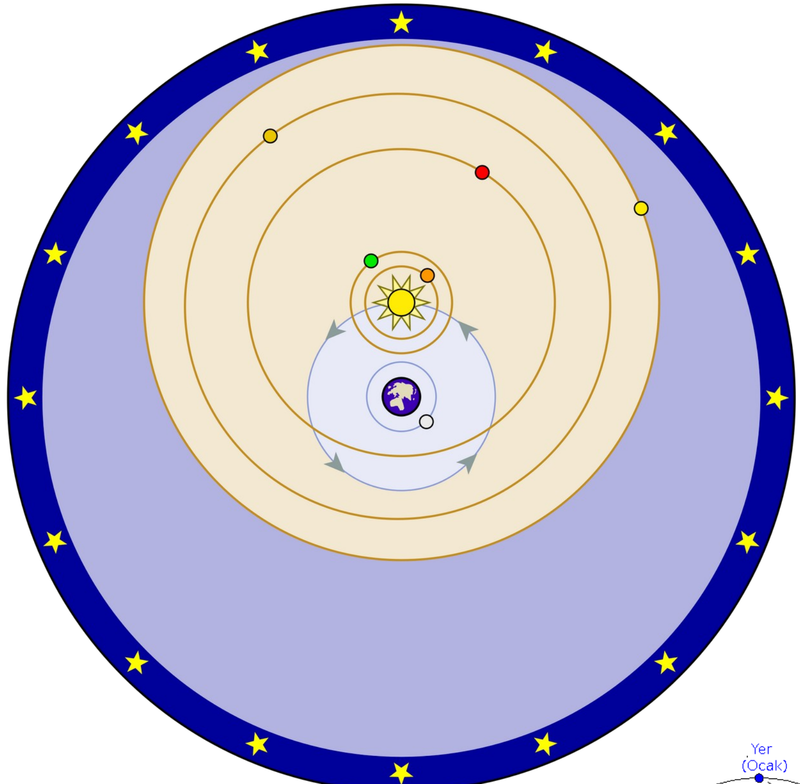
Böylece Mars ve Güneş'in konumlarını daha hassas ve çok daha basit bir modelle açıklamak mümkün oldu!

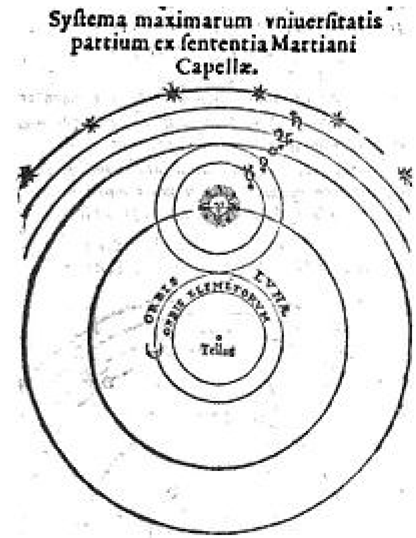


Nicolas Copernicus (1473 - 1543)

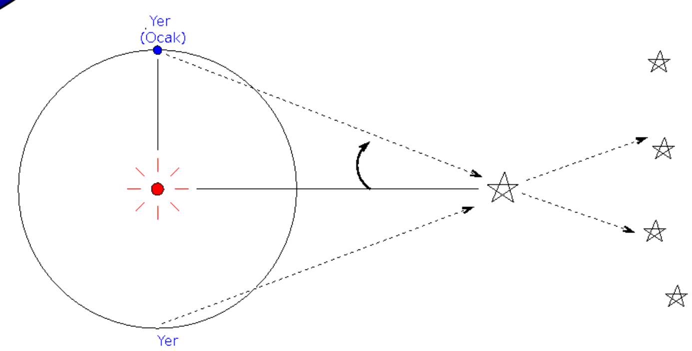
Tycho Brahé (1546 - 1601)
Melez Yer-Güneş Merkezli Evren Modeli



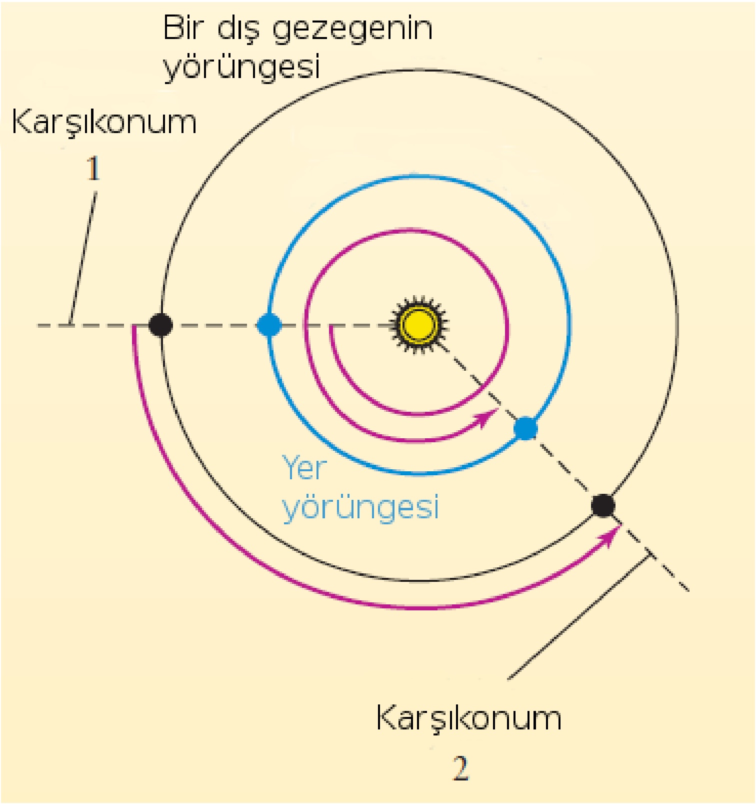




Tycho gelmiş geçmiş en iyi gözlemcilerden biri (belki de birincisi olduğu halde) Dünya'nın Güneş çevresinde dolanması durumunda yıldızların paralaktik hareket göstermesini beklediği halde bunu gözleyemediği için melez bir modele yöneldi. Eksik olan onun gözlemleri değil, paralaktik hareketi ölçecek teknolojiye (teleskop!) henüz ulaşılamamış olmasıydı...



YÖRÜNGE DÖNEMİ – KAVUŞUM DÖNEMİ



Kavuşum Dönemi (S): Gök cisminin aynı konfigürasyonda arka arkaya iki dizilişi arasındaki süre. (Örneğin iki karşıkonum ya da iki iç kavuşum)

Yörünge Dönemi: Bir gezegenin Güneş etrafında bir tam turunu attığı süre.

P: Gezegenin yörünge dönemi
E: Dünyanın yörünge dönemi (365.25 gün)
S: Kavuşum dönemi (gün cinsiden)

Dünyanın bir günde yörüngesi üzerinde katettği açısal yol 360 / E; dış gezegenin bir günde yörüngesi üzerinde katettği açısal yol 360 / P olmak üzere; iki karşıkonum arasında her iki cismin aldığı açısal yol (Dünyanın bu sırada dış gezegene tur bindireceği bu nedenle de 360 derece daha fazla açısal yol alacağı açıktır):

$$\frac{360}{P}\times S+360=\frac{360}{E}\times S$$

Her iki taraf 360xS 'ye bölünürse dış gezegen için karşıkonum koşulu;

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{E}-\frac{1}{S}$$

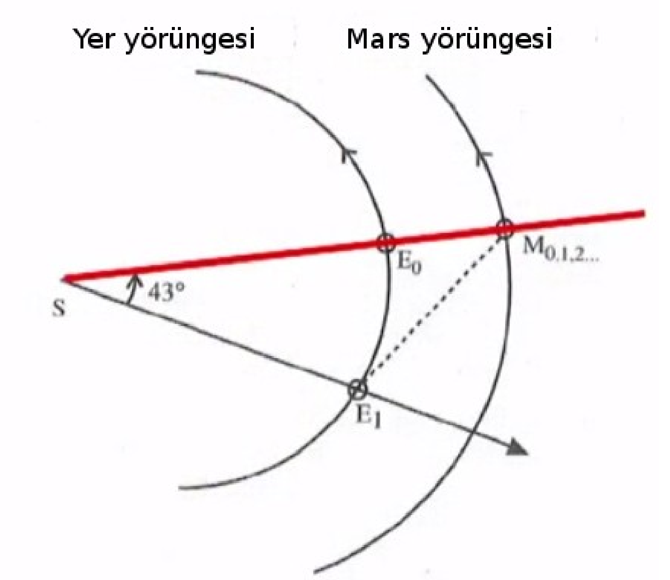
Dünya yörüngesinin içinde bir yörüngeye sahip gezegen için iç kavuşum koşulu;

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{E}+\frac{1}{S}$$

(türetiniz...)

Johannes Kepler (1571 - 1630)

- Güneş merkezli modelde Güneş (S) hareketsiz!
- Başlangıç: Karşıkonum (Yer, Mars ve Güneş aynı hizada) (E_0 – M_0). Güneş batarken Mars doğuyor!
- 1 Mars yılı (687 gün) = 1.88 Yer yörüngesi (E_1 – M_1). (Kavuşum dönemi (S) bilindiğinden P_{Mars} hesaplanabilir)
- Daha sonra gökyüzünde Güneş batarken Mars'ın bir Mars yılı öncesine göre konumunu ölçerseniz (M_1), Mars ile Yer'in konumları arasındaki açıyı (uzanım açısı) ölçmüş olursunuz (SE_1M_1 açısı).
- Dünya'nın dolanma periyodunu bildğiniz için Dünya'nın iki konumu arasındaki 43º fark (E_0SE_1 açısı) hesapla bulunabilir.

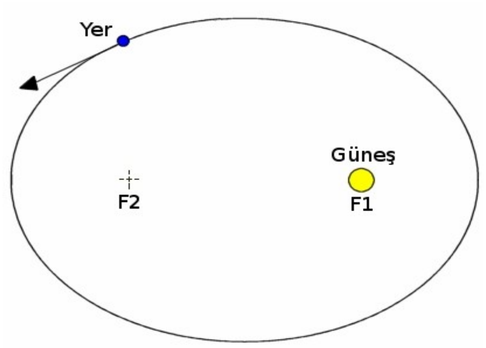


- Artık üçgenin iki açısını biliyorsunuz, E_1M_1S açısını kolaylıkla hesaplayabilirsiniz. Bu size Yer'in (E_1) ve Mars'ın (M_1) yörüngeleri üzerindeki konumları verir.
- Bu işlemi defalarca yaparsınız, hem Yer'in hem de Mars'ın yörüngelerinin tamamını kapsayarak yörünge geometrilerini çıkarabilirsiniz.

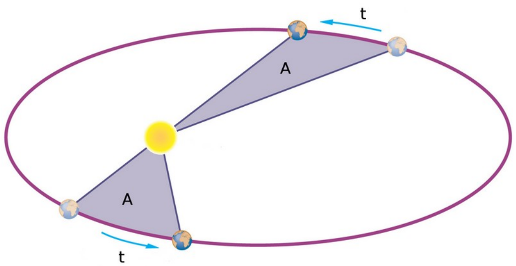
Kepler Yasaları

Böylece Kepler, Mars ve Yer'in (Brahe tarafından yapılan) yörünge gözlemlerinden bugün “Kepler Yasaları” adını verdiğimiz şu 3 gözlemsel (empirik) sonucu çıkardı.

1. Gezegenlerin yörüngeleri odaklarından birinde Güneş bulunan bir elips şeklindedir.



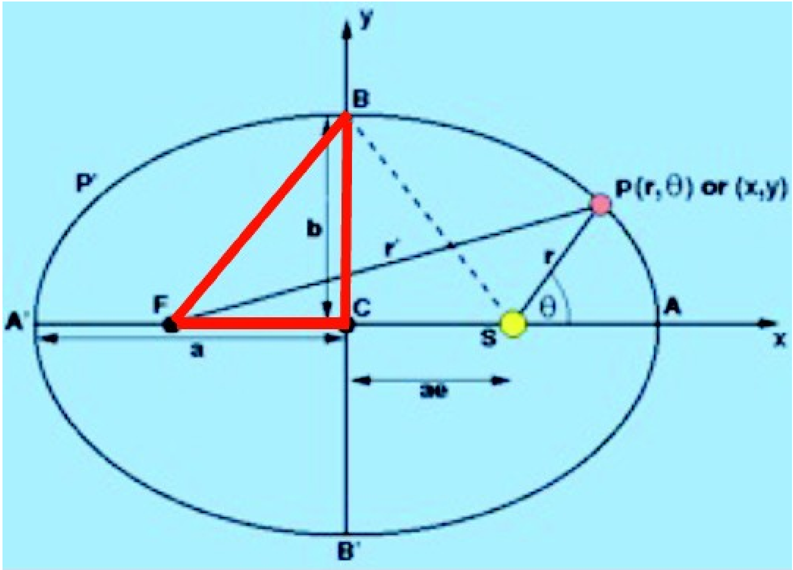
2. Gezegenler yörüngeleri üzerinde eşit zaman aralıklarında eşit alanlar tararlar.



3. Gezegenlerin yörünge büyüklükleri (küpü) ile dönemleri (karesi) arasında bir orantı vardır.

$$\frac{a^3}{P^2} = \text{sabit}$$

1. Kepler Yasası: Elips Formalizmi



a: Yarı-büyük eksen uzunluğu,
b: Yarı-küçük eksen uzunluğu,
e: Dış merkezlilik (eksantrisite),
F,S: Elipsin odakları,
r, θ: Kutupsal koordinatlar,
x, y: Kartezyen koordinatlar

Kutupsal Koordinatlar

$$\boxed{r + r' = 2a = \text{sabit}} \qquad (1)$$

FSP üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım

$$(r')^2 = r^2 + |FS|^2 - 2\,r\,|FS| \cos(FSP)$$

$$\cos(FSP) = \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta),$$

$$|FS| = 2ae$$

$$r' = 2a - r$$

Yerine koyacak olursak,

$$(r')^2 = r^2 + (2ae)^2 - 2\,r\,(2ae)\;(-\cos(\theta))$$

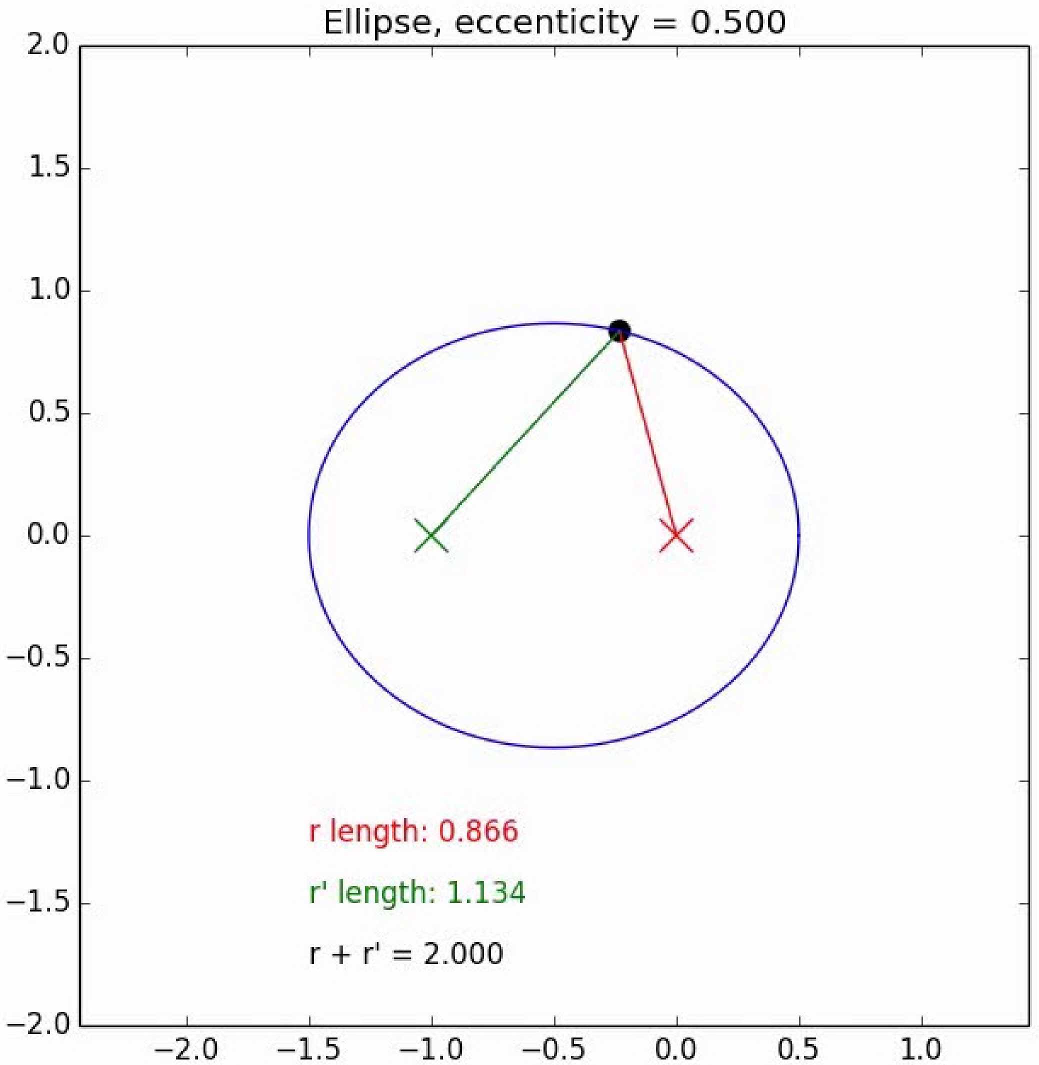
$$(2a - r)^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2\,r\,(2ae)\cos(\theta)$$

Şimdi r'yi çekelim,

$$\boxed{r = a\,(1 - e^2)\,/\,(1 + e\cos\theta)} \qquad (2)$$

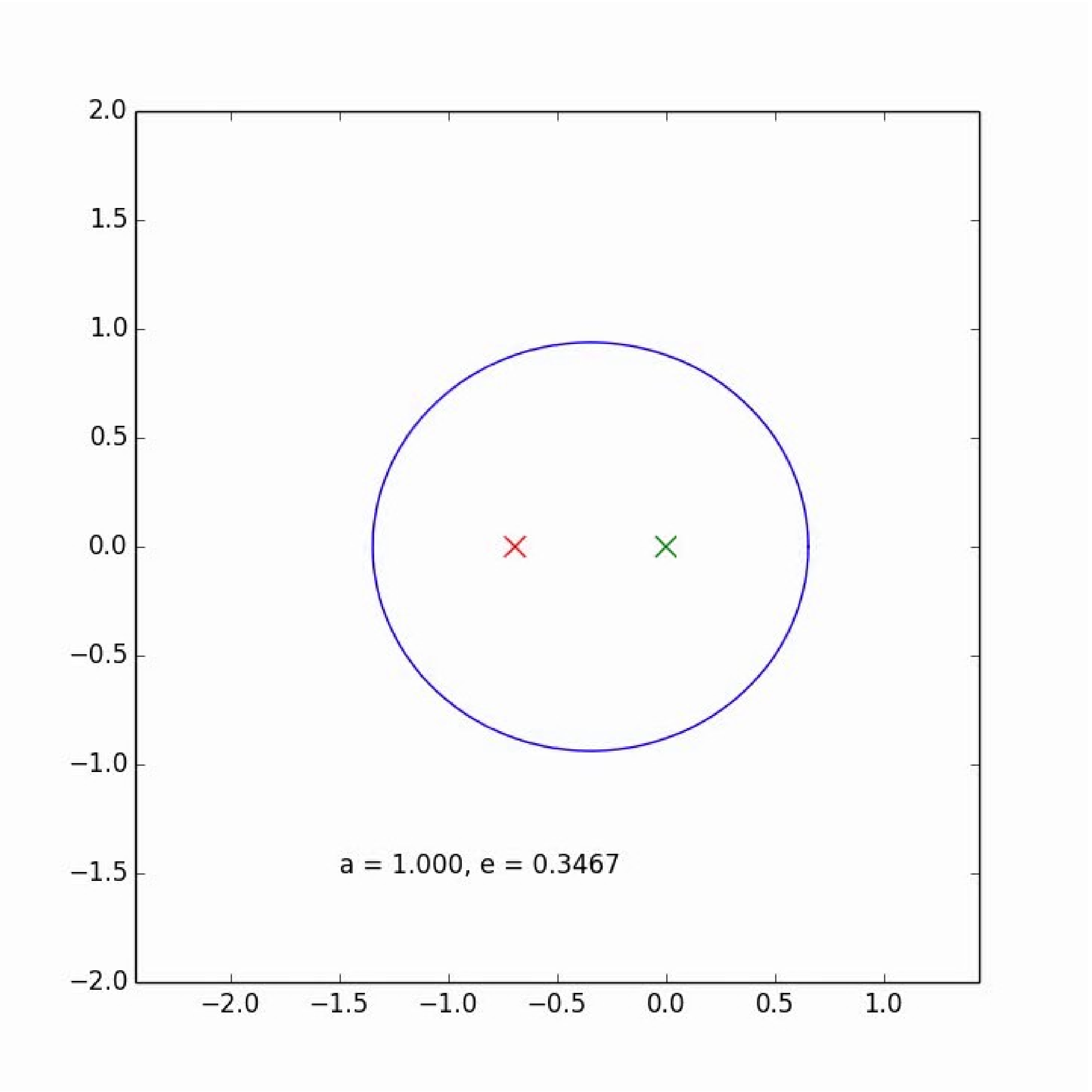
FCB üçgeninde Pisagor teoremi gereği,

$$\boxed{b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1 - e^2)} \qquad (3)$$

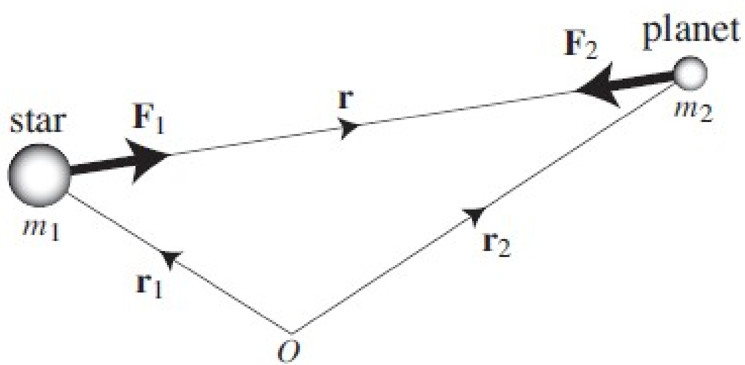


Enberi :
r (1-e)

Enöte:
r (1+e)


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
a = 1.000, e = 0.3467

2 cisim problemi



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Her iki kütle için Newton yasasını aşağıdaki şekilde yazabilirsiniz

$$F_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \qquad F_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

Bu denklemlerii basitleştirecek olursak

$$\ddot{\vec{r}}_1 = G\frac{m_2}{r^3}\vec{r} \qquad \ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1}{r^3}\vec{r}$$

Aşağıdaki çıkarma işlemi ile bu iki ifadeyi taraf tarafa çıkaralım

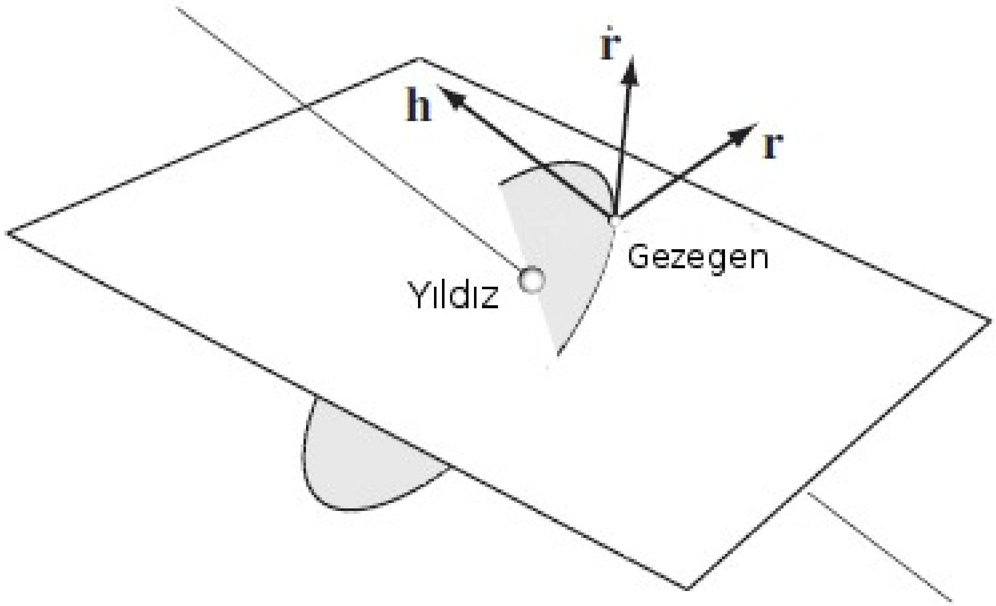
$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r} \quad \text{ve} \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 \qquad \ddot{\vec{r}} + G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r} = 0$$

r vektörüyle eşitliğin her iki tarafın vektörel çarpacak oursak

$$\vec{r}\, x\, \ddot{\vec{r}} + \left(G\frac{m_1+m_2}{r^3}\right)\vec{r}\, x\, \vec{r} = 0 \longrightarrow \vec{r}\, x\, \ddot{\vec{r}} = 0 \longrightarrow \vec{r}\, x\, \dot{\vec{r}} = \vec{h}$$

Açısal momentum integrali

Bu sonucun anlamı...



Yörünge hareketi sırasında bir gezegenin (m_2) konum ve hız vektörleri aynı düzlem üzerinde ve birbirlerine diktir. Momentum integralinin sabiti (h) ise bu her iki vektöre de diktir!

İşleme kutupsal koordinatlarda devam etmeliyiz.

$$\hat{r}=\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y} \longrightarrow \dot{\hat{r}}=(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})(\dot{\theta}) \longrightarrow \dot{\hat{r}}=\hat{\theta}(\dot{\theta})$$

r vektörünü açık yazıp, türevini alacak olursak

$$\vec{r}=r\hat{r} \longrightarrow \dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\hat{\theta}\dot{\theta}$$

elde ederiz. Şimdi bu ifadenin ikinci türevini alıp bilinmeyenleri yerine koyalım

$$\ddot{\vec{r}}=\ddot{r}\hat{r}+\dot{r}\dot{\hat{r}}\dot{\theta}+\dot{r}\hat{\theta}\dot{\theta}+r\dot{\hat{\theta}}\dot{\theta}+r\hat{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\vec{r}}=\ddot{r}(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})+\dot{r}(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})\dot{\theta}+\dot{r}(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})\dot{\theta}+r(-\cos(\theta)\hat{x}-\sin(\theta)\hat{y})\dot{\theta}\dot{\theta}+r(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})\ddot{\theta}$$

Şimdi bu çirkin ifadeyi biraz sadeleştirelim.

$$\ddot{\vec{r}}=(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2)+(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})(\dot{r}\dot{\theta}+\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})$$

$$\ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta} \longrightarrow \ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta}$$

Şimdi r vektörünü ve türevini açısal momentum integralinde yerine koyalım

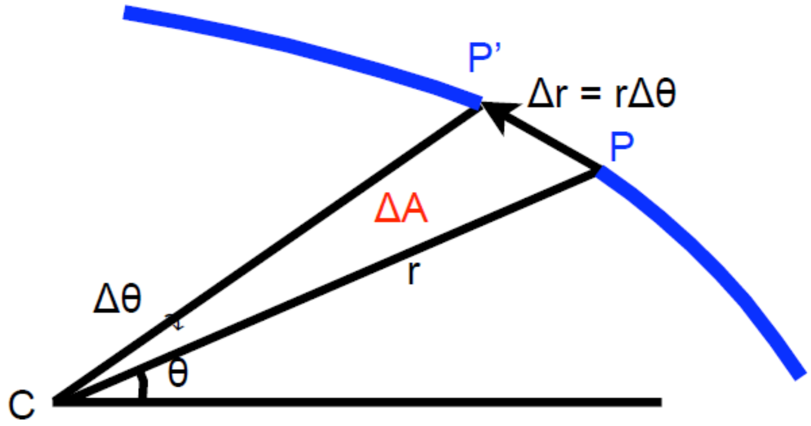
$$r\hat{r}\,x\,(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta})=h \longrightarrow r^2\dot{\theta}\hat{r}\,x\,\hat{\theta}=h$$

r ve θ birim vektörlerini yerine koyalım

$$r^2\dot{\theta}(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})\,x\,(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})=h$$

$$r^2\dot{\theta}(\cos^2(\theta)\hat{z}+\sin^2(\theta)\hat{z})=\vec{h} \longrightarrow h=r^2\dot{\theta}$$

2. Kepler Yasası:
"Birim zamanda taranan alan sabittir (dA / dt = C)"



Δr = (PP') yayının uzunluğu $r\Delta\theta$ kadardır.
Bu yay r'ye göre çok küçük olduğu için,
CPP' bir üçgen olarak varsayılabilir.
Bu durumda bu üçgenin alanı ΔA

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}\, r\, \Delta r = \tfrac{1}{2}\, r^2\, \Delta\theta$$

Her iki tarafın zamana göre türevini alırsak

$$\Delta A / \Delta t = \tfrac{1}{2}\, r^2\, \Delta\theta / \Delta t$$

Diferansiyel formda yazacak olursak

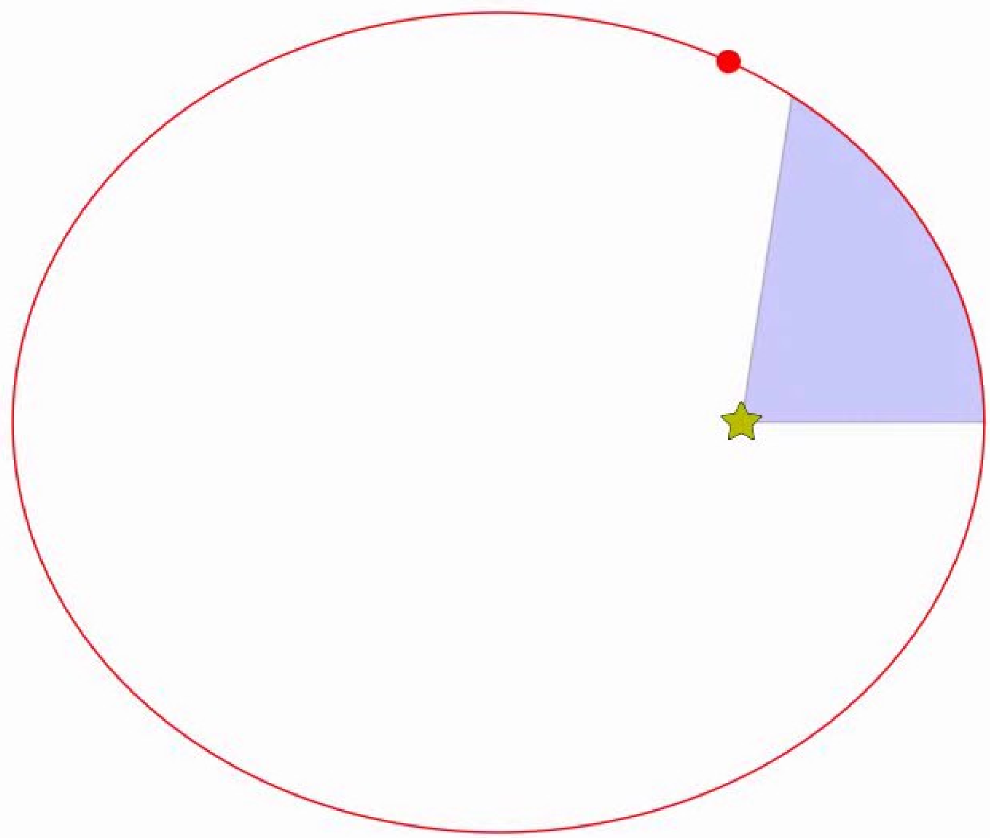
$$\boxed{dA / dt = \tfrac{1}{2}\, r^2\, d\theta / dt = C = h/2} \quad (4)$$

Yörünge hareketi için;
"Birim zamanda taranan alan sabittir" →
"Açısal momentum korunur"

J: açısal, p çizgisel momentum o.ü.
$J = r \times p = r \times mv$
$J = r\, m\, \Delta r / \Delta t = m\, r\, (r\Delta\theta / \Delta t)$

$$\boxed{J = m\, r^2\, (\Delta\theta / \Delta t) = 2mC = sabit} \quad (5)$$

Aynı şekilde yine sağ taraf sabit olduğu için
açısal momentum da sabittir!



Denklemlerle “oynamayı” sürdürelim!

Hareket denklemi: $\ddot{r}+G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r}=0$

Bu kez ivme vektörünü yerine koyalım $\longrightarrow$ $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=-G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r}$

$\ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

Eşitliğin sağ tarafına $0*\hat{\theta}$ ekleyelim $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=-G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r}+0*\hat{\theta}$

sağ ve sol taraftaki terimleri karşılıklı olarak eşitleyelim $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}=-G\frac{m_1+m_2}{r^3}r\hat{r}$ ve $(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=0*\hat{\theta}$

Sonuç olarak $\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-G\frac{m_1+m_2}{r^2}$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Hareket denklemini çözmek ve gezegenin konumunu, hızını ve ivmesini elde etmek için bu denklemi çözmeliyiz. Buradaki zorluk r ve θ ‘nın zamanın birer fonksiyonu olmasıyla birlikte r ‘nin θ’ya da bağlı olmasıdır!

Çözüm için momentum integraline tekrar dönmeliyiz…

Açısal momentum integralini hatırlayacak olursak

$$h=|\vec{r}\,x\,\dot{\vec{r}}|=|(rcos(\theta)\hat{x}+rsin(\theta)\hat{y})\,x\,(\dot{r}(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})+r(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y}))\dot{\theta}|=r^2\dot{\theta}\,\hat{z}$$

θ’nın türevini çekersek $\dot{\theta}=\frac{h}{r^2} \longrightarrow \ddot{\theta}=\frac{-2hr\dot{r}}{(r^2)^2}=-(\frac{2h\dot{r}}{r^3})$

Türev için zincir kuralını uygulayacak olursak;

$$\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{r}=\frac{d^2r}{d\theta^2}(\dot{\theta})^2+\frac{dr}{d\theta}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-G\frac{m_1+m_2}{r^2} \longrightarrow \frac{d^2r}{d\theta^2}(\dot{\theta})^2+\frac{dr}{d\theta}\ddot{\theta}-r(\dot{\theta})^2=-G\frac{m_1+m_2}{r^2}$$

Şimdi θ’nın birinci ve ikinci türevi için bulduklarımızı yerlerine koyalım

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}(\frac{h}{r^2})^2+\frac{dr}{d\theta}(\frac{-2h\dot{r}}{r^3})-r(\frac{h}{r^2})^2=-G\frac{m_1+m_2}{r^2} \longrightarrow \frac{h^2}{r^4}(\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}\frac{dr}{d\theta}-r)=-G\frac{m_1+m_2}{r^2}$$

$$\frac{h^2}{r^4}(\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\frac{(dr/d\theta)^2}{r}-r)=-G\frac{m_1+m_2}{r^2}$$

Bu denklemi çözmek için bir değişken değişimine ihtiyacımız var. r = 1 / u olmak üzere,

$$r=\frac{1}{u} \longrightarrow \frac{dr}{d\theta}=-\left(\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{d\theta} \longrightarrow \frac{d^2r}{d\theta^2}=\left(\frac{2}{u^3}\right)\left(\frac{du}{d\theta}\right)-\left(\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

Bir önceki sayfada bulduğumuz her şeyi burada yerine koyacak olursak

$$(h^2u^4)\left[\left(\frac{2}{u^3}\right)\left(\frac{du}{d\theta}\right)-\left(\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)-2u\left(\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]=-G(m_1+m_2)u^2$$

Denklem yandaki şekilde basitleşir: $$h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-G(m_1+m_2)$$

Bu tür diferansiyel denklemlere Binet denklemleri denir ve çözümleri aşağıdaki gibidir...

$$u=\frac{G(m_1+m_2)}{h^2}(1+e\cos(\theta-\varpi))$$

r = 1 / u dönüşümünü tekrar yapar ve yeni bir değişken (p) tanımlarsak

$$p=\frac{h^2}{G(m_1+m_2)}$$

$$h=\sqrt{(pG(m_1+m_2))}$$

Konum vektörünü de $$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\varpi)}$$ olarak elde ederiz.

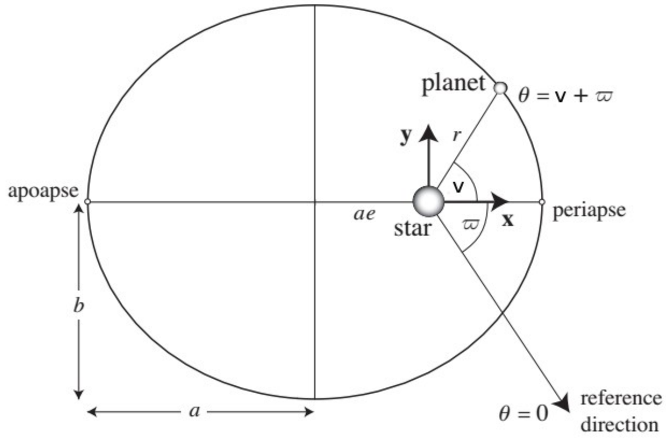
Kepler'in 3. Yasası

Bulduğumuz konum vektörü r, geometirik olarak konik kesitleri adı verilen bir eğri ailesini tanımlar. Herhangi bir sistem için eğrinin ne olacağını başlangıç koşulları belirler.0 < e < 1 için eğri bir elipstir ve p parametresi p = a(1 – e^2) olur.

$$r=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\left(\theta-\varpi\right)}$$

Bu bizi Kepler'in 1. Yasası'na getirdi. Yörüngenin elips olduğunu bildiğimizden integralin sabitlerini (e ve ω) geometrik olarak tanımlayabiliriz. θ, gerçel anomali, ω ise enberinin boylamı adlarını alır.

θ = ω → r_{min} = a(1 – e) (enberi) ve θ = ω + π → r_{max} = a(1 + e) (enöte) olur



Şimdi elipsin alanını yazalım

$$A=\pi a b=\int dA=\int_0^T \frac{1}{2} h\,dt=\frac{hT}{2}$$

$$T=\frac{2\pi a b}{h}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{G\left(m_1+m_2\right)}a^3$$

Kepler’in 3. Yasası:
“Gezegenlerin Yörünge Büyüklükleri ile Dönemleri Orantılıdır!”

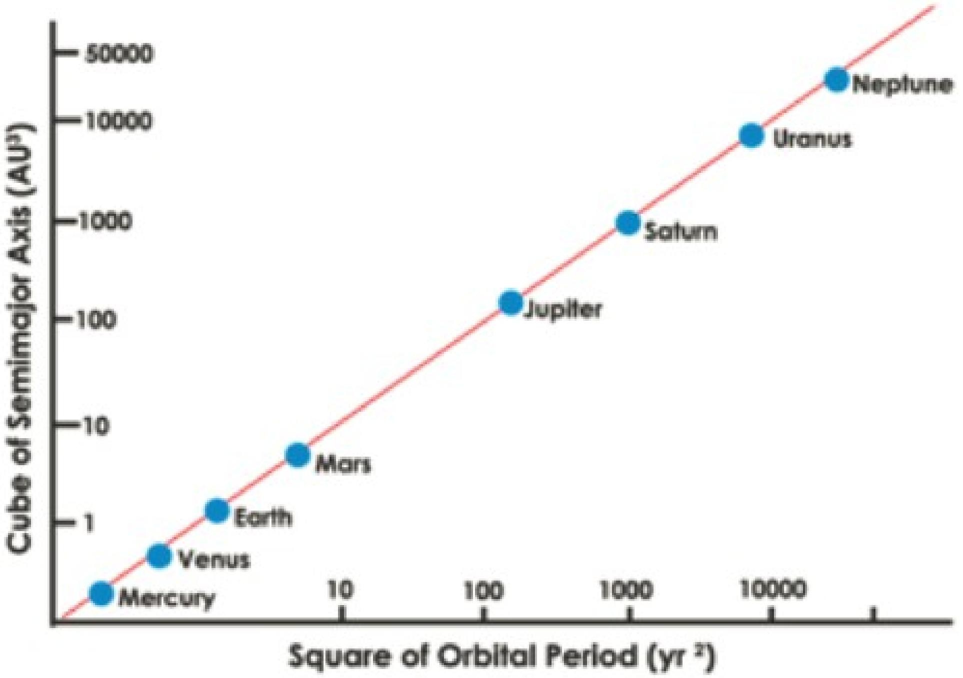
Üçüncü yasa da aslında gözlemsel (empirik) bir sonuçtur. Gezegenlerin yörünge büyüklüklerinin (yarı-büyük eksen uzunluklarının) kareleri, dolanma dönemlerinin küplerine karşılık çizdirildiğinde aralarında lineer bir ilişkinin olduğu görülür.

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3$$

Şeklinde ifade edilen bu ilişkide;
P [yıl], a[AB], M[$M_{Güneş}$] seçilirse

$$P^2 = a^3$$

bulunur.



Sonuç olarak...

Gezegenin yörünge döneminin (P); dış merkezliliğinden (e) bağımsız ve toplam kütle (m_1 + m_2) ile yıldıza olan uzaklığın (ya da yörünge büyüklüğünün, a) bir fonksiyonu olduğnu bulduk. “Tur sayısı” parametresini (n) aşağıdaki şekilde tanımlayacak olursak.

$n=\frac{2\pi}{T}$ ise $G(m_1+m_2)=n^2 a^3$ ya da $h=\sqrt{(G(m_1+m_2)a(1-e^2))}=n\,a^2\sqrt{(1-e^2)}$

Şimdi yine hareket denklemini kullanarak gezegenin hızını bulalım:

$$\ddot{r}+\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\vec{r}=0$$

Denklemin her iki tarafının r’nin türeviyle skaler çarpacak olursak

$$\dot{r}\,.\,\ddot{r}+\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\dot{r}=0\,.\,\dot{r}$$

ve bu ifadeyi t kadar bir süre için integre edecek olursak

$$\frac{1}{2}\dot{r}\,.\,\dot{r}-\frac{G(m_1+m_2)}{r}=C \longrightarrow \frac{1}{2}V^2-\frac{G(m_1+m_2)}{r}=C$$

Vis-viva İntegrali

Gezegenin enerjisi yörünge boyunca korunur!

Kepler Problemi

Yörüngenin uzaydaki konumunun ($\tilde{\omega}$) değişmediğini varsayacak olursak $\theta = \tilde{\omega} + \nu$

$$\dot{\theta} = \dot{\nu} \Rightarrow V^2 = \dot{r}.\dot{r} = r^2(\dot{\nu})^2$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\nu)} \longrightarrow \dot{r} = \frac{r\dot{\nu}e\sin(\nu)}{(1+e\cos(\nu))^2} \longrightarrow \dot{r} = \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}}e\sin(\nu)$$

$$r\dot{\nu} = \frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}}(1+e\cos(\nu)) \longrightarrow V^2 = \frac{n^2a^2}{1-e^2}(1+2e\cos(\nu)+e^2)$$

$$V^2 = G(m_1+m_2)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

Böylece gezegenin konumu ve ivmesinin yanı sıra hızını da hesaplamış olduk. Ancak bu parametrelerin hepsini zamanın değil gerçel anomali açısının (θ) birer fonksiyonu olarak bulmuş olduk.

Çözümü gerçel anomalinin değil zamanın bir fonksiyonu olarak bulmak için Kepler Problem'ini, çözmeliyiz.

Kepler Probleminin Çözümü

2 cisim problemini gerçel anomalinin bir fonksiyonu olarak çözdük. Şimdi sıra zamana bağımlılığı elde etmeye geldi. Böylece gezegenin bir t anında nerede, hangi hızda ve hangi ivmeyle hareket ettiğini de anlamış, yani hareket denkleminin tam bir çözümünü elde etmiş olacağız.

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\nu)} \longrightarrow r\dot{\nu}=\frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}}(1+e\cos(\nu))$$

$$V^2=G(m_1+m_2)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\dot{r}^2=n^2a^3\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)-\frac{n^2a^4(1-e^2)}{r^2} \longrightarrow \dot{r}=\frac{na}{r}\sqrt{(a^2e^2-(r-a)^2)}$$

Bu denklemi çözmek için eksantrik anomali (E) adını verdiğimiz yeni bir parametre tanımlamaya ihtiyacımız olacak.

$$r=a(1-e\cos(E))$$

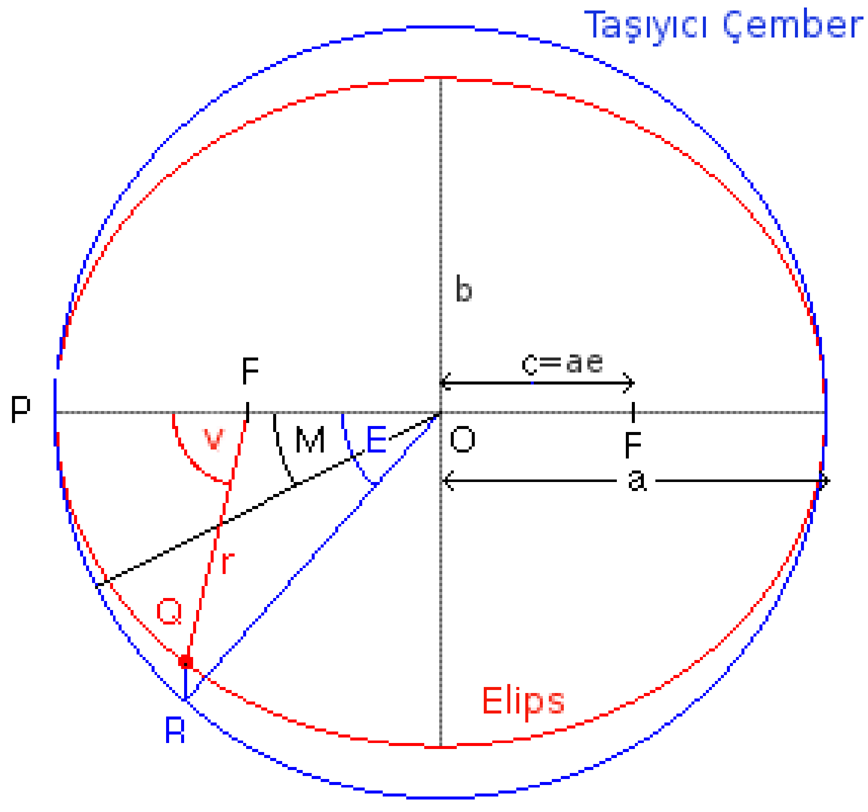
Çözmemiz gereken denklemi r yerine E cinsinden yazacak olursak;

$$E=\frac{M}{(1-e\cos(E))}$$

M: ortalama anomali

f(t – T_0) = E – esinE şeklindeki ifade ve tam katları; M = n (t – T_0) (n bir tam sayı olmak üzere) için bu denklemi çözer.

Ortalama (M) ve Eksantrik Ayrıklık (Anomali)



Kepler Denkleminin Çözümü

$t = T_0$ (enberi geçişi) ve $\nu = 0$ alınırsa $M = 0$
$t = T_0 + T / 2$ ve $\nu = \pi$ için ise $M = \pi$, yani $M = E - e\sin E$

Bu ifade analitik olarak çözülemez ve şu şekilde bir yol izlenir.

1) M bulunur $$M = n(t - T_0)$$

2) M kullanılarak E bulunur $$M = E - e\sin(E)$$

3) E kullanılarak r'ye geçilir. $$r = a(1 - e\cos(E))$$

4) ν (gerçek anomali) $$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\nu)}$$

Bu algoritma size tam çözümü verecektir. Algoritmanın ikinci basamağı sadece nümerik olarak çözülebilir. Ayrıntı için bkz. Danby (1988).