AST413 Gezegen Sistemleri ve Oluşumu
DİKİNE HIZ DENKLEMİ
Doç. Dr. Özgür Baştürk

Yıldızların dikine hızları, uzaydaki hareketleri sırasında sahip oldukları hızların gözlemcinin bakış doğrtultusundaki bileşenleridir. Yıldızların tayflarındaki çizgilerin yıldızın hareketinin bu bileşeni dolayısıyla laboratuvar dalgaboylarından ne kadar ayrıldıklarının belirlenerek aşağıda (1) ifadesiyle verilen Doppler formülünde yerine konmasıyla hesaplanır.

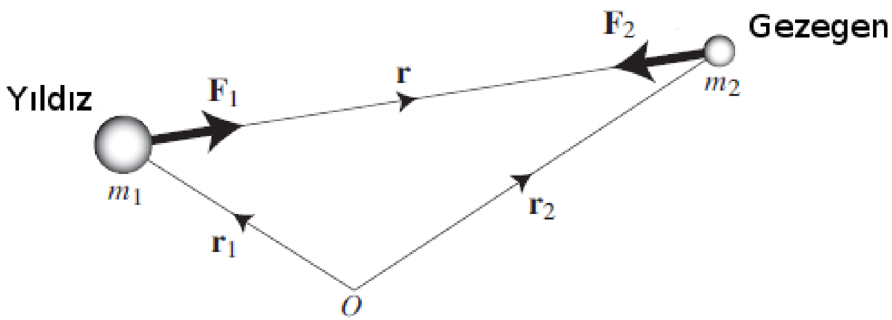
$$\frac{V_r}{c} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} \quad (1)$$

Burada V_r yıldızın dikine hızı, c ışık hızı, $\delta\lambda$ ilgili çizginin laboratuvar dalgaboyundan ne kadar ayrıldıklaırını, λ ise bu çizginin laboratuvar dalgaboyunu göstermektedir.

Gezegenlerin yörünge hareketeleirnden bahsederken basitleştirme için genellikle "gezegenlerin yıldızların etrafında dolandığı" ifadesi kullanılır. Oysa ki yıldız ile gezegen ortak kütle merkezi etrafında eş döneme sahip bir yörünge hareketi yaparlar. Ortak kütle merkezi, yıldızın kütlesi gezegenin kütlesine göre çok büyük olduğundan yıldıza çok yakındır. Güneş-Dünya ikilisinde Güneş, ortak kütle merkezinden sadece ~450 km uzaklıktadır. Bu nedenle Güneş de yarıçapı 450 km olan neredeyse çembersel yörüngesi üzerindeki hareketini 1 yılda tamamlar. Hareketin tümünün gözlemcinin bakış doğrultusunda olduğunu varsayacak olsak bu hareket ~9 cm/s 'lik bir dikine hıza karşılık gelir. Bu hız dolayısıyla tayfsal çizgiler çok az miktarda kayacaktır. Doppler formülünde yerine konulacak olursa $\delta\lambda = 1.64 \times 10^{-6}$ A olacağı görülebilir. Bu kadar küçük bir kaymayı ölçmek için tek bir çizgi yeterli olmaz. Bu nedenle binlerece çizginin bir çeşit ortalamasını temsil eden ve yıldız tayfının şablon tayflarla çapraz korelasyonu sonucu elde edilen profiller kullanılır.

Bu yöntemin kullanılmasıyla bugüne değin (15 Kasım 2020 itibarı ile) sayıları 900'ü aşan gezegen keşfi yapılmıştır. Ayrıca dikine hız yöntemi, geçiş yöntemiyle keşfedilen gezegenlerin onaylanması ve parametrelerinin kesinleştirilmesi için de kullanılmaktadır. Bu nedenle ötegzegen bilimi için önemlidir. Bu noktadan hareketle bu bölümde Kepler yasaları, dikine hız yöntemiyle ötegezegen keşfi perspektifinden ele alınarak dikine hız denklemi türetilecektir. Bazı şekil ve formüller Kelsey I. Clubb'ın Ağustos 2008 tarihli çalışmasından alınmış ve Türkçeleştirilmiştir. Kendisine çalışmasını paylaştığı için teşekkür ederim.

İKİ CİSİM PROBLEMİ



Şekil 1. Genelleştirilmiş 2 cisim problemi. Gezegen-Yıldız ikilisinde koordinat sisteminin merkezi burada olduğu gibi herhangi bir O noktası yerine kütle merkzi olarak alınır.

İki cisim probleminde her iki cisim üzerine etkiyen kütleçekim kuvvetleri:

$F_1 = m_1 \ddot{r}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r$ ve $F_2 = m_2 \ddot{r}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r$ olarak yazılabilir. Burada e_r vektörlerin yönünü gösterir birim vektördür. İfadeler sırasıyla m_1 ve m_2 ile bölünerek basitleştirilecek olursa;

$\ddot{r}_1 = G \frac{m_2}{r^2} \hat{e}_r$ ve $\ddot{r}_2 = -G \frac{m_1}{r^2} \hat{e}_r$ elde edilir.

Bu iki ifade aşağıdaki şekilde birbirinden çıkarıldığında;

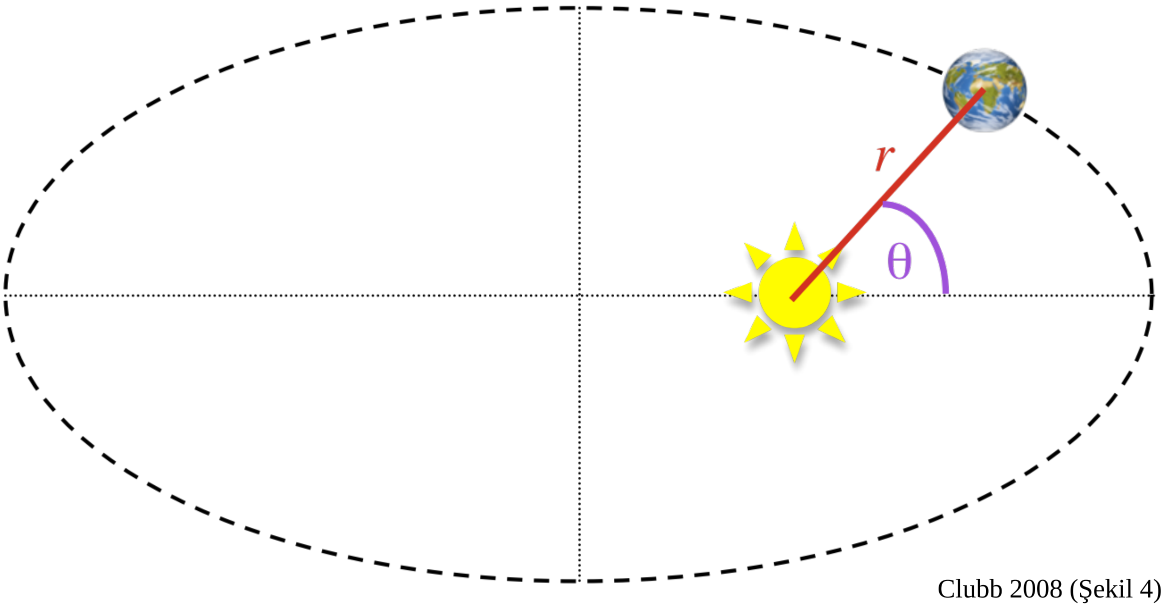
$\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = -G \frac{m_1 + m_2}{r^2} \hat{e}_r$ ve şekilden de görüleceği üzere $\ddot{r} = \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1$ yerine Newton'ın kütleçekim yasasında yerine konursa

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = -G \frac{m_1 + m_2}{r^2} \hat{e}_r \Rightarrow \ddot{r} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^2} \hat{e}_r$$

elde ediklir ki bu **<u>hareket denklemi</u>** olarak adlandırılır. İki cisim probleminde her iki cismin konum vektörlerini elde etmek üzere çözülmesi gereken diferansiyel denklem budur. Bu denklem toplam kütle cinsinden $M = m_1 + m_2$ olmak üzere aşağıdaki şekilde de ifade edilebliir.

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{M}{r^2} \hat{e}_r = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

Problemi çözmek için kutupsal koordinatlara geçmeye ihtiyaç duyulur. Bu amaçla **<u>gerçel anomali</u>** kavramıyla tanımlanan ve r konum vektörünün gezegenin yörüngesinin enberi noktasından açısal ayrıklığını ifade eden θ açısı kullanılır (Şekil 2).



Clubb 2008 (Şekil 4)

Şekil 2. Gerçel anomali (θ). Gezegenin konumu Dünya, yıldızın konumu Güneş görseli ile verilmiştir.

r vektörün büyüklüğü olmak üzere $\vec{r}=r\,\hat{e}_r$ şeklinde tanımlandığı için r vektörünün zamana göre türevi (hız) aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\frac{d}{dt}\vec{r}=\frac{d}{dt}(r\,\hat{e}_r)=r\frac{d}{dt}\hat{e}_r+\hat{e}_r\frac{d}{dt}r$$

e_r vektörü konum vektörü olduğundan, gezegenin yörünge hareketi boyunca zamanla değişecektir. Bu değişimikutupsal koordinatlarda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\hat{e}_r=\cos\theta\,\hat{x}+\sin\theta\,\hat{y}\Rightarrow\frac{d}{dt}\hat{e}_r=\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\hat{x}+\sin\theta\,\hat{y})$$

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_r=\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\hat{x}+\sin\theta\,\hat{y})=\cos\theta\frac{d}{dt}\hat{x}+\hat{x}\frac{d}{dt}(\cos\theta)+\sin\theta\frac{d}{dt}\hat{y}+\hat{y}\frac{d}{dt}(\sin\theta)$$

x ve y birim vektörlerinin zamana göre türevi 0 olacağından bu ifade

$$\hat{e}_r=0+(-\sin\theta)\dot{\theta}\,\hat{x}+0+(\cos\theta)\dot{\theta}\,\hat{y}=\dot{\theta}(-\sin\theta\,\hat{x}+\cos\theta\,\hat{y})$$

şekilnde basitleştirilebilir. En sağda parantezin içindeki ifade e_θ birim vektörünün tanımıdır.

$$\hat{e}_\theta=(-\sin\theta\,\hat{x}+\cos\theta\,\hat{y})\Rightarrow\frac{d}{dt}\hat{e}_r=\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

Bu ifade $\frac{d}{dt}\vec{r}=\frac{d}{dt}(r\,\hat{e}_r)=r\frac{d}{dt}\hat{e}_r+\hat{e}_r\frac{d}{dt}r$ ifadesinde yerine konacak olursa;

$$\frac{d}{dt}\vec{r}=\frac{d}{dt}(r\,\hat{e}_r)=r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\hat{e}_r\,\dot{r}\,,\ \frac{d}{dt}r=\dot{\vec{r}}\Rightarrow\dot{\vec{r}}=r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\hat{e}_r\,\dot{r}$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alındığında ise;

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}=\frac{d}{dt}(r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\hat{e}_r\,\dot{r})=\dot{r}\frac{d}{dt}\hat{e}_r+\hat{e}_r\frac{d}{dt}\dot{r}+r\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta)+\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta\frac{d}{dt}r$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}=\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\ddot{r}\,\hat{e}_r+r[\dot{\theta}\frac{d}{dt}\hat{e}_\theta+\hat{e}_\theta\frac{d}{dt}\dot{\theta}]+\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}=\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\ddot{r}\,\hat{e}_r+r\,\dot{\theta}\frac{d}{dt}\hat{e}_\theta+r\,\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

elde edilmiş olunur. Bu ifadede $\frac{d}{dt}\hat{e}_\theta$ ‘nın hesaplanıp yerine konması gerekir. Bunun için e_θ ifadesinin tanımından aşağıdaki şekilde yararlanılır.

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_\theta=\frac{d}{dt}(-\sin\theta\,\hat{x}+\cos\theta\,\hat{y})=-\sin\theta\frac{d}{dt}\hat{x}+\hat{x}\frac{d}{dt}(-\sin\theta)+\cos\theta\frac{d}{dt}\hat{y}+\hat{y}\frac{d}{dt}(\cos\theta)$$

x ve y yönündeki birim vektörlerin zamana göre türevi 0 olduğundan bu ifade

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_\theta = 0 + \hat{x}(-\cos\theta)\dot{\theta} + 0 + \hat{y}(\sin\theta)\dot{\theta} = -\dot{\theta}(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})$$

elde edilir. $\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$ olarak tanımlandığından

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

Artık bu ifade r konum vektörünün zamana göre türevini veren ifadede yerine konabilir.

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \ddot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}(-\dot{\theta}\,\hat{e}_r) + r\,\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta = 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \ddot{r}\,\hat{e}_r - r\,\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r + r\,\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

elde edilmiş olunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} \equiv \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta$$

elde edilir. Bu ifade Newton'un kütle çekim yasasının sadeleştirilmiş halinde yerine konabilir.

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta = -G\frac{M}{r^2}\,\hat{e}_r$$

Bu eşitliğin sağlanabilmesi için her iki tarafta e_r birim vektörü ile biten terimlerin eşit ve eşitliğin sol tarafındaki e_θ ile biten terimin ise 0'a eşit olması gerekir.

$$(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r = -G\frac{M}{r^2}\,\hat{e}_r \Rightarrow \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = -G\frac{M}{r^2} \quad \text{ve}$$

$$(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta = 0 \Rightarrow r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = 0$$

Diğer taraftan

$$\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\theta}) = r^2\frac{d}{dt}\dot{\theta} + \dot{\theta}\frac{d}{dt}r^2 = r^2\,\ddot{\theta} + \dot{\theta}(2\,r\,\dot{r}) = r(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})$$

En sağda parantez içindeki ifadenin 0 olduğu bir önceki ifadeden görülmektedir. Bu durumda

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\theta}) = (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}) = 0$$

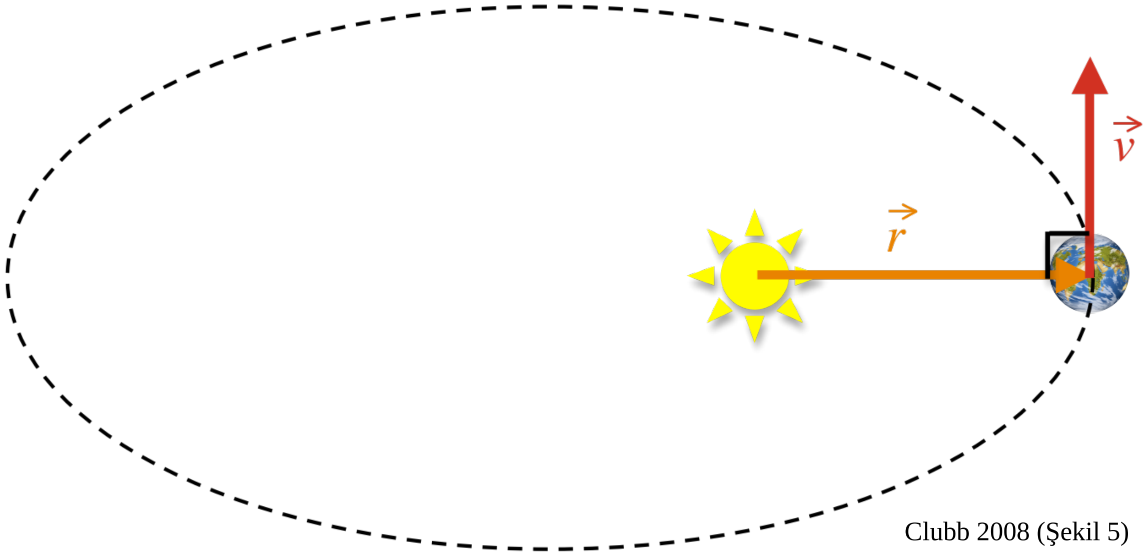
Bu ifade (1 / r) ifadesi 0 olamayacağından, türev ifadesinin 0 olmasını gerektirir ki bu önemli bir sonuçtur.

$$\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\theta}) = 0$$

Zira zamana göre türevi alınan niceliğin türevinin 0 olması onun zaman içinde sabit kaldığı yani korunduğu anlamına gelir.

Bu ifadenin özünde **açısal momentumun korunduğu** anlamına geldiğini göstermek üzere açısal momentum ifadesi tanımlanır.

Yörünge Hareketi Süresince Açısal Momentumun Korunumu



Clubb 2008 (Şekil 5)

Şekil 3. Gezegenin yörünge hareketi boyunca konum vektörü r ile onun zamana göre türevi olan hız vektörü v, her zaman birbirine diktir.

Toplam açısal momentum vektörü $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ şeklinde tanımlanır. Burada p vektörü lineer momentum vektörüdür ve m cismin kütlesini göstermek üzere $\vec{p}=m\vec{v}$ şeklinde tanımlanır.

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}=m(\vec{r}\times\vec{v})$$

Gezegenin yörünge hareketi süresince r vektörü ile v vektörü birbirine dik olduğundan $|\vec{r}\times\vec{v}|=|\vec{r}||\vec{v}|=v\,r$ ve sonuç olarak

$$|\vec{L}|=m\,v\,r$$

Birim kütleye düşen momentum $|\vec{h}|=\left|\frac{\vec{L}}{m}\right|=\frac{(m\,v\,r)}{m}=v\,r$ olarak tanımlanmak ve açısal hız (v = ωr) ifadesi aşağıdaki şekilde düzenlenmek kaydıyla;

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\Rightarrow v=\omega r=\dot{\theta}r\Rightarrow h=v\,r=\dot{\theta}r\,r=\dot{\theta}r^2$$

Sonuç olarak sabit olduğu (korunduğu) bulunan $\dot{\theta}r^2$ parametresinin birim kütle başına momentum olduğu bulunmuş oldu. Bu **açısal momentumun yörünge hareketi boyunca korunduğu** anlamına gelir.

Elips Formalizmi

Açısal momentum sabiti olarak da bilinen, kütle başına momentum vektörü h'ın tanımı üzerinden ilerlendiğinde,

$$h=r^2\dot{\theta}\Rightarrow h^2=r^4\dot{\theta}^2=r^3(r\dot{\theta}^2)\Rightarrow r\dot{\theta}^2=\frac{h^2}{r^3}$$

Bu ifade $\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-G\frac{M}{r^2}$ ifadesinde yerine konacak olursa;

$$\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}=-G\frac{M}{r^2}\Rightarrow\ddot{r}=\frac{h^2}{r^3}-G\frac{M}{r^2}$$

Bu diferansiyel denklemi çözerek konum vektörü r'yi elde etmek üzere aşağıdaki değişken değiştirmesi uygulanabilir:

$$u\equiv\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

Türevde zincir kuralı du / dt 'yi ifade etmek üzere aşağıdaki şekilde kullanılabilir:

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}$$

Bu durumda konum vektörü r'nin zamana göre türevi

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}=-r^2\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}=-(r^2\dot{\theta})\frac{du}{d\theta}=-h\frac{du}{d\theta}$$

alındığında aşağıdaki sade ifade elde edilmiş olunur.

$$\dot{r}=-h\frac{du}{d\theta}$$

Bu ifadenin zamana göre türevi alındığında ise,

$$\frac{d}{dt}\dot{r}=\frac{d}{dt}(-h\frac{du}{d\theta})=-h\frac{d}{dt}(\frac{du}{d\theta})$$

elde edilir. Bu noktada türevde zincir kuralı bir kez daha aşağıdaki şekilde uygulandığında

$$\frac{d}{dt}(\frac{du}{d\theta})=\frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{d\theta}=\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta}$$

elde edilen ifade bir önceki denklemde yerine konursa

$$\frac{d}{dt}\dot{r}=-h\frac{d}{dt}(\frac{du}{d\theta})=-h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta}\Rightarrow\ddot{r}=-h\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$\ddot{r}=\frac{h^2}{r^3}-G\frac{M}{r^2}$ ifadesinde r, konum vektörünün biraz önce elde edilen ikinci türevi (ivme vektörü) yerine konduğunda;

$$\ddot{r}=\frac{h^2}{r^3}-G\frac{M}{r^2}\Rightarrow -h\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{h^2}{r^3}-G\frac{M}{r^2}$$

Yine $u\equiv\frac{1}{r}$ değişken değiştirmesiyle,

$$-h\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}=h^2u^3-GMu^2\Rightarrow\frac{d^2u}{d\theta^2}=-\frac{1}{h\dot{\theta}}\left(h^2u^3-GMu^2\right)=-\frac{hu^3}{\dot{\theta}}+\frac{GMu^2}{h\dot{\theta}}$$

Bu denklemde açısal momentum sabiti yerine konduğunda

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=-\frac{r^2\dot{\theta}u^3}{\dot{\theta}}+\frac{GMu^2}{r^2\dot{\theta}\dot{\theta}}=r^2u^3+\frac{GM}{r^2\dot{\theta}^2}u^2=-\frac{1}{u^2}u^3+\frac{GM}{r^2\dot{\theta}^2}\frac{1}{r^2}=-u+\frac{GM}{r^4\dot{\theta}^2}=-u+\frac{GM}{h^2}$$

Sonuç olarak konum vektörüne $u\equiv\frac{1}{r}$ değişken değiştirmesiyle bağlı u değişkeninin zamana göre türevini veren ifade

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=-u+\frac{GM}{h^2}$$

diferansiyel denkleminin çözülmesiyle elde edilebilir. Aşağıdaki ifade bu diferansiyel denklemin çözümüdür.

$$u(\theta)=A\cos(\theta-\delta)+\frac{GM}{h^2}$$

Denklemde yerine konarak kolaylıkla test edilebilecek bu çözümde A, bir sabit (genlik), δ evre açısı olmak üzere değerleri başlangıç koşulları ile belirlenir. Denklem r cinsinden yazılacak olursa

$$\frac{1}{r(\theta)}=A\cos(\theta-\delta)+\frac{GM}{h^2}\Rightarrow r(\theta)=\frac{1}{A\cos(\theta-\delta)+\frac{GM}{h^2}}$$

elde edilen ifadenin sağ tarafının iki tarafı h^2 ile çarpıldıktan sonra GM ile bölündüğünde

$$r(\theta)=\frac{1}{A\cos(\theta-\delta)+\frac{GM}{h^2}}=\frac{h^2}{h^2A\cos(\theta-\delta)+GM}=\frac{\frac{h^2}{GM}}{\frac{h^2A\cos(\theta-\delta)}{GM}+1}$$

Bu denklem aşağıdaki ifadeyle verilen elips denklemine çok benzemektedir.

$$r(\theta)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

Bu iki denklem birbirine eşitlendiğinde

$$e=\frac{h^2 A}{GM} \Rightarrow \frac{h^2}{GM}=\frac{e}{A} \Rightarrow a(1-e^2)=\frac{e}{A} \Rightarrow a=\frac{e}{A(1-e^2)}$$

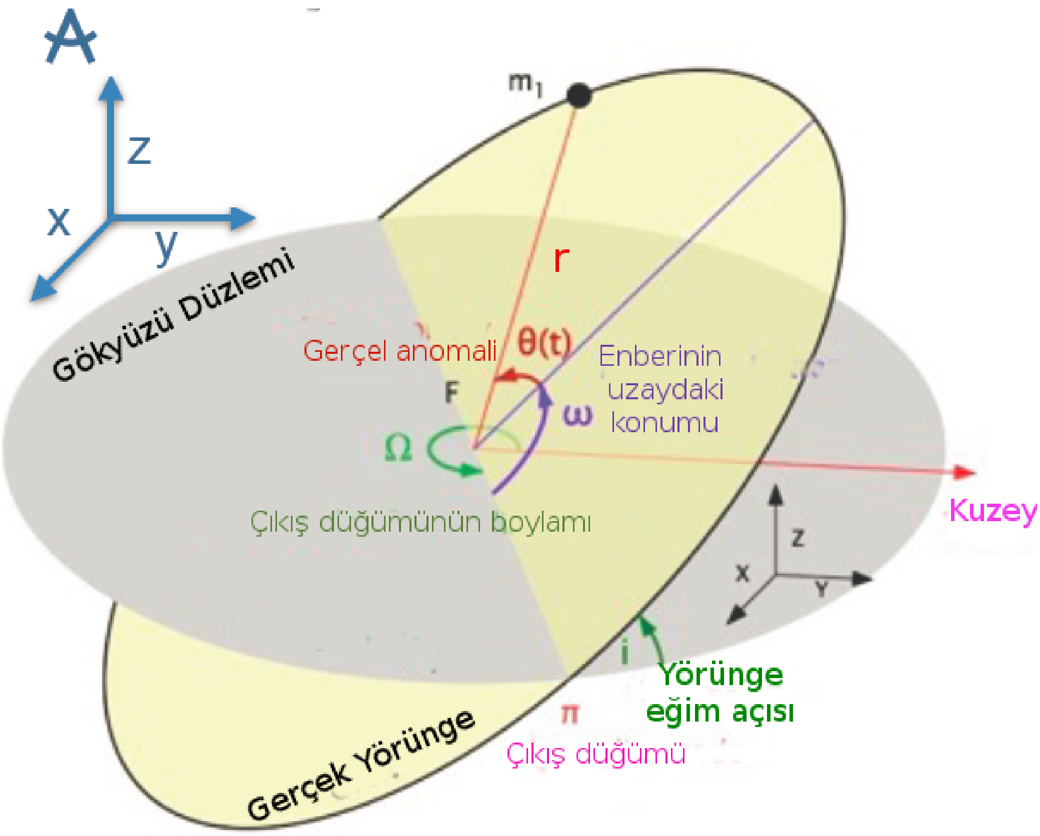
olduğu kolaylıkla görülebilir. A sabiti aşağıdaki ifadeyle elde edilebilir.

$$A=\frac{GMe}{h^2}$$

Sonuç olarak r konum vektörünü veren ifadenin bir elips olduğu görülmüş olur. Bir başka deyişle, **"gezegenin yörüngesi bir elipstir!"**. Bu özünde Kepler'in 1. yasasıdır.

DİKİNE HIZ DENKLEMİ

Dikine hız denklemini türetmek üzere aşağıdaki gerçek yörünge ve onun gökyüzü üzerindeki izdüşümü iyice incelenmeli ve anlaşılmalıdır. Gözlemci dikine hız yönteminde gerçek yörünge üzerine bilgi sahibi değildir. Üzerine bilgi sahibi olabileceği tek şey gerçek yörüngenin gözlemcinin bakış doğrultusundaki düzlemde, yani izdüşüm yörüngeyle i = 90° açı yapan düzlemde, gerçekleşen harekettir. ***i*** açısı **yörünge eğim açısı** olarak bilinir. Gözlemcinin bakış doğrultusundaki tüm uzunluklar gerçek yörüngedeki uzunlukların **sin i** kadar kısaltılmış hali olacaktır.



Şekil 4. Yıldızın (m_1) gerçek (sarı düzlem) ve izdüşüm (gri düzlem) yörüngeleri. Bu iki düzlem arasındaki açı (yörünge eğim açısı) ***i*** olup gözlemcinin bakış doğrultusu z ekseni yönündedir. Yörüngeye ilişkin parametreler şekil üzerinde verilmiştir.

Şekil 4'ten r konum vektörünün z yönündek bileşkesinin $z=r\sin(\theta+\omega)\sin i$ olduğu görülebilir.

Dikine hız (V_r) yıldızın yörüngesindeki hızının gözlemcinin bakış doğrultusundaki (z ekseni yönündeki) bileşenidir. Bu hareketin dikine hız yönteminde görmediğimiz gezegenin değil yıldızın hareketi olduğu, yıldızın tayfsal gözlemlerden elde edilen tayfsal çizgi kaymalarının Doppler formülü kullanılarak elde edilen bu hızın yörünge hareketi boyunca elde edilen her bir tayfta değişeceği unutulmamalıdır! Bir yörünge dönemi boyunca yapılacak gözlemler sonucunda elde edilen yıldızın dikine hız değişimidir ve **dikine hız eğrisi** olarak adlandırılır. Herhangi bir t anında yıldızın sahip olacağı dikine hız ***r*** konum vektörünün bakış doğrultusundaki bileşeni **z** vektörünün zamana göre türevinin alınmasıyla bulunabilir.

$$V_r \equiv \dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r \sin(\theta+\omega)\sin i\right)$$

Bu denklem aşağıdaki şekilde açılabilir:

$$\frac{dz}{dt} = r\frac{d}{dt}\left(\sin(\theta+\omega)\sin i\right) + \left(\sin(\theta+\omega)\sin i\right)\frac{d}{dt}r$$

$$\frac{dz}{dt} = r\left[\sin(\theta+\omega)\frac{d}{dt}\sin i + \sin i \frac{d}{dt}\sin(\theta+\omega)\right] + \sin(\theta+\omega)\sin i\,\dot{r}$$

$$\frac{dz}{dt} = r\left[\sin(\theta+\omega)\cos i\frac{d}{dt}i + \sin i\cos(\theta+\omega)\frac{d}{dt}(\theta+\omega)\right] + \dot{r}\sin(\theta+\omega)\sin i$$

Yörüngenin enberi noktasının uzaydaki konumunu veren enberinin argümanı (ω) ve yörünge eğim açısının (i) zamanla değişmediği varsayılacak olursa;

$$\frac{dz}{dt} = 0 + r\sin i\cos(\theta+\omega)\dot{\theta} + \dot{r}\sin(\theta+\omega)\sin i$$

ifade düzenlendiğinde;

$$V_r = \left[r\dot{\theta}\cos(\theta+\omega) + \dot{r}\sin(\theta+\omega)\right]\sin i$$

bulunur. Bu noktada ***r*** konum vektörünün zamana göre türevi ile ***θ*** gerçel anomali açısının zamana göre türevinin bulunup yerine konması gerekir. Öncelikle konum vektörünün zamana göre türevini elde etmek üzere;

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left[\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\right] = \frac{[1+e\cos\theta]\frac{d}{dt}[a(1-e^2)] - [a(1-e^2)]\frac{d}{dt}[1+e\cos\theta]}{[1+e\cos\theta]^2}$$

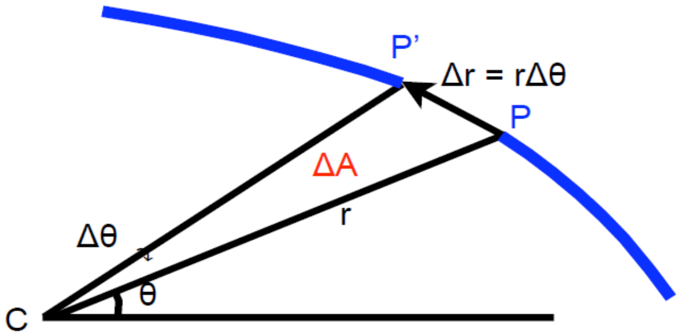
ifadesi düzenlenir. Yörünge yarı-büyük eksen uzunluğu (***a***) ile dışmerkezliliği (***e***) zamana göre sabit olduklarından türevleri 0'dır.

$$\dot{r} = \frac{0-[a(1-e^2)][-e\sin\theta\dot{\theta}]}{[1+e\cos\theta]^2} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\left[\frac{e\dot{\theta}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

Bu ifade de düzenlendiğinde konum vektörünün zamana göre türevini veren ifade elde edilir.

$$\dot{r} = \frac{r\,e\,\dot{\theta}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

Daha sonra gerçel anomalinin (θ) zamana göre türevini elde etmek üzere Kepler'in ikinci yasasından faydalanılır. 2. yasa aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Geometrik olarak,



Şekil 5. Kepler'in 2. yasasının geometrik ifadesi

t zamanda yıldız tarafından ortak kütle merkezi (C) etrafındaki yörünge düzlemi üzerinde taranan alan (ΔA), CPP' yay diliminin alanıdır. PP' yayını gören Δθ açısının çok küçük olması nedeniyle doğru kabul edilebilecek olması dolayısıyla bu yay dilimi bir üçgen varsayılabilir. Bu durumda bu üçgenin alanı;

$$\Delta A = \frac{1}{2} r\, r\, \Delta\theta = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

Aynı ifade A = π a b ifadesinde a ve b'nin $a = \frac{h^2}{GM(1-e^2)}$ ve $b = a\sqrt{1-e^2}$ ifadeleri kullanılıp türev alınarak da elde edilebilir. İfadedeki $h = r^2\dot{\theta}$ ifadesinin açısal momentum sabiti olduğuna bu nedenle de *dt* kadarlık zaman aralıklarında dA kadar alanlar taranacağına, bir başka deyişle ***"yıldızın yörünge hareketi boyunca eşit zaman aralıklarında eşit alanlar"*** tarayacağına dikkat ediniz. Bu Kepler'in 2. yasasının yıldız yörüngesi için ifadesidir!

$$A = \pi a b = \pi a \left(a\sqrt{1-e^2}\right) \Rightarrow A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

Bu denklem geometrik yolla elde edilen üçgen alanının bir yörünge dönemi boyunca (P) integre edildikten sonra yerine konursa;

$$\frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{P} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

Bu ifadeden $r\dot{\theta}$ ifadesini çekmek üzere aşağıdaki düzenlemeler yapılır.

$$r\dot{\theta} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{rP} = \frac{1}{r} \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{P}$$

r konum vektörü bu ifadede yerine konduğunda;

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Rightarrow r\dot{\theta} = \frac{1+e\cos\theta}{a(1-e^2)} \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{P}$$

$$r\dot{\theta} = \frac{2\pi a(1+e\cos\theta)}{P\sqrt{1-e^2}}$$

elde edilir.

Bu ifade ***r*** konum vektörünün zamana göre türevinde yerine konduğunda;

$$\dot{r}=\frac{r\,e\,\dot{\theta}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\Rightarrow\dot{r}=r\dot{\theta}\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}=\frac{2\pi a(1+e\cos\theta)}{P\sqrt{1-e^2}}\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$\dot{r}=\frac{2\pi a\,e\sin\theta}{P\sqrt{1-e^2}}$$

Artık dikine hız denkleminde ***r*** konum vektörünün türevi $\dot{r}$ ve $r\dot{\theta}$ için bulunan ifade yerine konabilir.

$$V_r=[r\dot{\theta}\cos(\theta+\omega)+\dot{r}\sin(\theta+\omega)]\sin i$$

$$V_r=[\frac{2\pi a(1+e\cos\theta)}{P\sqrt{1-e^2}}\cos(\theta+\omega)+\frac{2\pi a\,e\sin\theta}{P\sqrt{1-e^2}}\sin(\theta+\omega)]\sin i$$

Bu ifade aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$V_r=\frac{2\pi a\sin i}{P\sqrt{1-e^2}}[e\cos\theta\cos(\theta+\omega)+e\sin\theta\sin(\theta+\omega)]$$

Aşağıdaki çok iyi bilinen trigonometrik açılımlar bu ifadeyi sadeleştirmek için kullanılabilir.

$$\cos(\theta+\omega)=\cos(\theta)\cos(\omega)-\sin(\theta)\sin(\omega)$$

$$\sin(\theta+\omega)=\sin(\theta)\cos(\omega)+\cos(\theta)+\sin(\omega)$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

Bu açılımlar dikine hız ifadesinde yerine konup ifade sadeleştirildiğinde;

$$V_r=\frac{2\pi a\sin i}{P\sqrt{1-e^2}}[\cos(\theta+\omega)+e\cos\omega]$$

Bu ifade **dikine hız denklemi** olarak bilinir. Aslında gözlenen yıldızın yörünge hareketi olduğu için $a = a_1$ yazılarak yıldız için

$$V_{r,\,yıldız}=\frac{2\pi a_1\sin i}{P\sqrt{1-e^2}}[\cos(\theta+\omega)+e\cos\omega]$$

$a = a_2$ yazılarak ise gezegen için dikine hız ifadesi düzenlenmiş olur. Ancak gezegenden ışık alınamadığı ve tayfının gözlenmesiyle dikine hızının elde edilemediği unutulmamalıdır!

$$V_{r,\,gezegen}=\frac{2\pi a_2\sin i}{P\sqrt{1-e^2}}[\cos(\theta+\omega)+e\cos\omega]$$

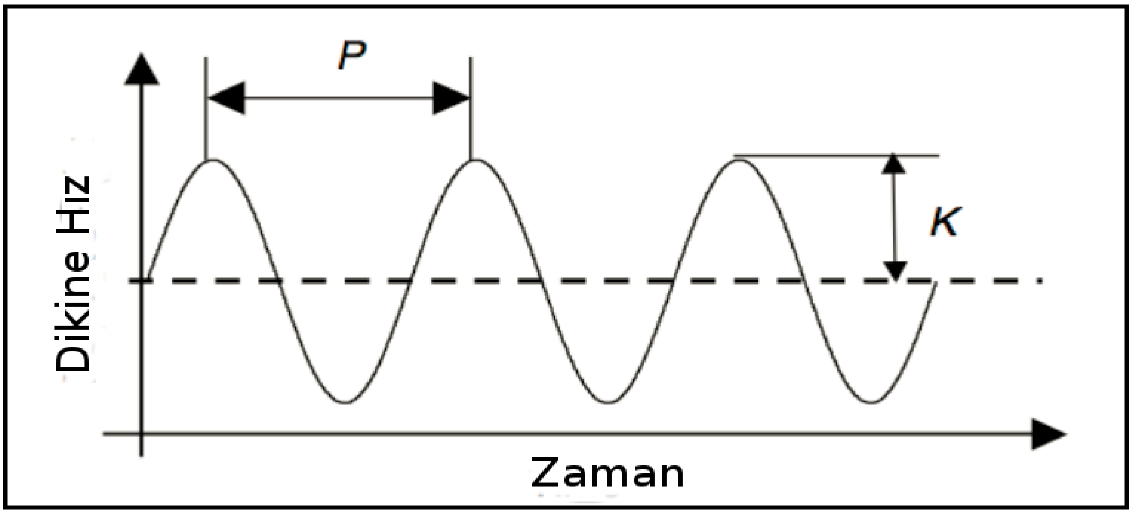
Dikine hız ifadesinin ilk sol tarafı bir sabit olup **dikine hız yarı-genliği** olarak bilinir ve $\mathbf{K_1}$ ile gösterilir. Sağ tarafındaki ifade ise, gerçel anomali θ'nın değişimiyle dönemli olarak değişir.

$$K = \frac{2\pi a \sin i}{P\sqrt{1-e^2}}$$

Aynı şekilde bu ifade de hem yıldız, hem gezegen için ayrı ayrı yazılabilir.

$$K_1 = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} \quad \text{ve} \quad K_2 = \frac{2\pi a_2 \sin i}{P\sqrt{1-e^2}}$$

Tayfsal gözlemlerle elde edilen bir dikine hız eğrisi teorik olarak Şekil 6'daki gibidir. Bu eğri üzerindeki her bir nokta o zamanda elde edilen bir tayftaki çizgilerin kayma miktarlarının hesaplanması sonucu bulunan dikine hız değeridir. Gözlemsel dikine hız eğrisini oluşturmak için hassas ve zaman aralığına mümkün olduğunca sık yayılmış tayfsal gözlemlerin yapılmasına ihtiyaç duyulur. Bu amaçla yüksek çözünürlüklü tayflçeker ve büyük teleskop düzenekleri kullanılmaktadır. Yüksek çözünürlüklü tayfçekerler büyük ve ağır gözlem araçları olduğu ve yerden de bu gözlemler yapılabildiği için henüz ötegezegen araştırmaları için yapılan dikine hız gözlemleri yer gözlemleri ile sınırlı olup, uzaydan yapılmamaktadır.



Gezegenin yörüngesinin büyüklüğü her ne kadar gözlenemeyen K_2 dikine hız eğrisinden belirlenebilir gibi görünse de Kepler'in 3. yasası kullanılarak da elde edilebliir.

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a_2^3$$

Bu ifadeden gezegenin yörünge yarı-büyük eksen uzunluğu (a_2) çekildiğinde

$$a_2^3 = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2} P^2$$

Uyarı: Bu noktada a_2 ile m_2'nin birbirinden bağımsız elde edilemediğine ve her ikisinin de yörünge eğim açısı (i) bilinmeden bulunamayacağına dikkat edilmelidir! Dikine hız yönteminde yörünge eğimi açısını bilmenin olanağı olmadığından bu parametrelerin ancak *sin i* ile çarpımları bulunabilir Bir başka deyişle, yörünge eğim açısı dejenerasyonu sadece dikine hız gözlemleriyle kaldırlamaz!

Bu sonucu daha açık görebilmek üzere kütle merkezi tanımı yeniden (bu kez $r_1 = a_1$, $r_2 = a_2$ kullanılarak) tekrar yazılmalıdır.

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow a_1 = \frac{m_2}{m_1} a_2$$

ifadesi yıldızın dikine hız yarı-genliği formülünde yerine konursa;

$$K_1 = \frac{2\pi \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} \frac{m_2}{m_1} a_2$$

Gezegenin yarı-büyük eksen uzunluğu a_2 ise Kepler'in 3. yasasındaki ifadesiyle yerine yazılırsa;

$$K_1 = \frac{2\pi \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2} P^2\right)^{1/3}$$

Bu ifadeyi sadeleştirmek üzere

$$K_1 = \frac{m_2}{m_1} \frac{\sin i}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{8\pi^3 G(m_1+m_2) P^2}{4\pi^2 P^3}\right)^{1/3} = \left(\frac{2\pi G}{P}\right)^{1/3} \frac{m_2}{m_1} (m_1+m_2)^{1/3} \frac{\sin i}{\sqrt{1-e^2}}$$

Bu noktada yıldızın kütlesinin gezegenin kütlesinden çok büyük olduğu ($m_1 >> m_2$) varsayımıı yapılabilir. Ancak bunun her zaman doğru olmayabileceğini bilmekte fayda vardır. Güneş Sistemimiz'deki tüm gezegenler için (kütlesi Güneş'inkinin 1000'de 1'i olan Jüpiter dahil olmak üzere) bu varsayım iyi bir yaklaşımdır. 0.120 Güneş kütlesinde, M5.5 tayf türünden bir yıldız olan GJ 3512'nin etrafında dikine hız yöntemiyle keşfedilen GJ 3512 b'nin minimum kütlesi 0.463 $M_{jüğ}$ olup gezegenin kütlesinin yıldızınkine oranı (m_2 / m_1) yaklaşık 1 / 270'dir (Morales vd. 2019). Bu örneğe karşın bu yaklaşım çoğu zaman doğru ve güvenilirdir ve $m_1 + m_2 \sim m_1$ olmasını gerektirir. Bu ifade yarı-genlik ifadesinde yerine konursa;

$$K_1 = \left(\frac{2\pi G}{P}\right)^{1/3} \frac{m_2}{m_1} m_1^{1/3} \frac{\sin i}{\sqrt{1-e^2}} = \left(\frac{2\pi G}{P}\right)^{1/3} m_1^{-2/3} \frac{m_2 \sin i}{\sqrt{1-e^2}}$$

Sonuç olarak yıldızın dikine hız yarı-genliği ifadesi sıklıkla aşağıdaki şekilde verilir.

$$K_1 = \left(\frac{2\pi G}{P}\right)^{1/3} \frac{m_2 \sin i}{m_1^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

Bu formül dikine hız yönteminin özünü oluşturmaktadır. Zira yörünge dönemi (P) ve yörünge dış merkezliliği (e) gözlemsel dikine hız eğrisinin uyumlanmasıyla kolaylıkla elde edilen gözlemsel niceliklerdir. Yıldız kütlesi m_1 ise yıldızın tayfı üzerinde yapılan yıldız atmosferi analizleriyle elde edilen etkin sıcaklık (T_{etkin}), yüzey çekim ivmesi (log g) ve metalisite (Z) değerlerinden hareketle, yıldız evrimi modelleri kullanılarak elde edilir. Yani yıldız kütlesinde model bağımlılığı bulunmaktadır. Diğer bütün nicelikler sabittir. Sonuç olarak yıldızın tayfsal gözlemleriyle elde edilen dikine hız yarı-genliği K_1, gezegenin kütlesinin yörünge eğim açısının sinüsüyle çarpımını (***m_2 sin i***) verir. Kepler'in 3. yasası kullanılarak da gezegenin yörünge büyüklüğüne geçilebilir. Ancak o da yörünge eğim açısına bağlı olarak bulunabilir. Sadece dikine hız gözlemleriyle bu dejenerasyonu ortadan kaldırmak mümkün değildir!